استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

التمرين الأول : (3,5 ن)

(I) في الحلقة الواحدية $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\times)$ نعتبر المصفوفتين $\mathbb{A}$ و $\mathbb{I}$ المعرفتين بما يلي :

$$\mathbb{I}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \mathbb{A}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{5}-1}{2}&0&0\\0&-2&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$$

0,75 ن ① أحسب : $\mathbb{I}-\mathbb{A}$ و $\mathbb{A}^2$

0,50 ن ② استنتج أن $\mathbb{A}$ تقبل مقلوبا يتم تحديده .

(II) لكل عددين حقيقيين a و b من المجال $I=]1,+\infty[$ نضع : $a*b=\sqrt{a^2b^2-a^2-b^2+2}$

0,25 ن ① تحقق أن : $x^2y^2-x^2-y^2+2=(x^2-1)(y^2-1)+1 \quad , \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$

0,50 ن ② بين أن : $*$ قانون تركيب داخلي في I

0,50 ن ③ نذكر أن : $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ زمرة تبادلية .

نعتبر التطبيق :

$$\varphi : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow I \qquad x \longmapsto \sqrt{x+1}$$

0,50 ن (أ) بين أن التطبيق φ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ إلى $(I,*)$.

0,25 ن (ب) استنتج بنية $(I,*)$.

0,75 ن (ج) بين أن المجموعة : $\Gamma=\{\sqrt{1+2^m}/m\in\mathbb{Z}\}$ زمرة جزئية من $(I,*)$

التمرين الثاني : (3,5 ن)

الجزءان الأول و الثاني مستقلان.

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(o,\vec{u},\vec{v})$

(I) نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : (E) حيث : a عدد عقدي غير منعدم .

$$(E) \quad : \quad iZ^2+(2-i)aZ-(1+i)a^2=0$$

0,75 ن ① حدد Z_1 و Z_2 حلي المعادلة (E) .

0,25 ن ②(أ) تحقق أن : $Z_1Z_2=a^2(i-1)$

0,50 ن (ب) بين أن : Z_1Z_2 عدد حقيقي $\Leftrightarrow$ $\arg a\equiv\frac{-3\pi}{8}\left[\frac{\pi}{2}\right]$

(II) ليكن c عددا عقديا غير منعدم و z عدد عقدي غير منعدم .

① (أ) نعتبر النقط A و B و C و D و M التي ألحاقها على التوالي هي : 1 و $(i+1)$ و c و ic و z .	0,50 ن
(ب) بين أن : A و D و M نقط مستقيمية $\Leftrightarrow \quad (ic+1)z+(ic-1)\bar{z}=2ic$	0,50 ن
② بين أن : $(ic+1)z-(ic-1)\bar{z}=0 \Leftrightarrow (AD)\perp(OM)$	0,50 ن
ليكن h لحق النقطة H : المسقط العمودي للنقطة O على (AD) .	
(أ) بين أن : $h-(1+i)=\frac{i}{c}(h-c)$	0,75 ن
(ب) استنتج أن : $(CH)\perp(BH)$	0,25 ن

التمرين الثالث : (3,0 ن)

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $(E) \quad : \quad 143x-195y=52$

① (أ) حدد القاسم المشترك الأكبر للعددين 195 و 143 . و استنتج أن المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$.	0,50 ن
(ب) علما أن : $(-1;-1)$ حل خاص لـ (E) . أوجد الحل العام لـ (E) في $\mathbb{Z}^2$	0,75 ن
② ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم وأولي مع العدد 5 بين أن : $n^{4k}\equiv 1[5] \quad , \forall k\in\mathbb{N}$	0,50 ن
③ ليكن x و y عددين صحيحين طبيعيين غير منعدمين بحيث : $x\equiv y[4]$	
(أ) بين أن : $n^x\equiv n^y[5] \quad , \forall n\in\mathbb{N}^*$	0,50 ن
(ب) استنتج أن : $n^x\equiv n^y[10] \quad , \forall n\in\mathbb{N}^*$	0,50 ن
④ ليكن x و y عددين صحيحين طبيعيين غير منعدمين بحيث يكون الزوج (x,y) حلا للمعادلة (E) . بين أنه مهما يكن n من $\mathbb{N}^*$: العددان n^x و n^y لهما نفس رقم الوحدات في نظمة العد العشري .	0,25 ن

التمرين الرابع : (5,5 ن)

n عدد صحيح طبيعي غير منعدم .

نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $\boxed{f_n(x)=x+\frac{e^{-x}}{n}}$

ليكن $(\mathscr{C}_n)$ المنحنى الممثل للدالة f_n في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

① أحسب : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)$	0,50 ن
② (أ) أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى $(\mathscr{C}_n)$ بجوار $-\infty$.	0,50 ن
(ب) بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y=x$ مقارب مائل للمنحنى $(\mathscr{C}_n)$ بجوار $+\infty$ و حدد الوضع النسبي لـ $(\mathscr{C}_n)$ و (D)	0,50 ن
③ أدرس تغيرات الدالة f_n ثم ضع جدول تغيراتها.	0,75 ن
④ أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_3)$ نأخذ : $\boxed{f_3(-1,5)\approx 0}$ و $\boxed{ln3=1,1}$ و $\boxed{f_3(-0,6)\approx 0}$	0,50 ن
⑤ (أ) بين أنه إذا كان $n\geq 3$ فإن : $\frac{e}{n}<\ln(n)$	0,25 ن
(ب) بين أنه إذا كان $n\geq 3$ فإن المعادلة $f_n(x)=0$ تقبل بالضبط حلين x_n و y_n حيث : $x_n\leq -ln(n)$ و $\frac{-e}{n}\leq y_n\leq 0$	1,00 ن

ج) أحسب : $\lim\limits_{n\infty} x_n$ و $\lim\limits_{n\infty} y_n$ — 0,50 ن

6) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} g(x) = -1 - x\ln x \\ g(0) = -1 \end{cases}$$

أ) بين أن الدالة g متصلة على اليمين في 0 — 0,25 ن

ب) تحقق أن لكل $n \geq 3$ $\quad g\left(\frac{-1}{x_n}\right) = \frac{\ln n}{x_n}$ — 0,50 ن

ج) استنتج : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{x_n}$ — 0,25 ن

التمرين الخامس : (4,5 ن)

نعتبر الدالة العددية المعرفة على $[0,1]$ بما يلي :

$$\begin{cases} F(x) = \frac{1}{x} - \frac{ln(1+2x)}{2x^2} \;, \forall x\epsilon]0,1] \\ F(0) = 1 \end{cases}$$

1) ليكن x عنصرا من المجال $[0,1]$ بين أنه مهما يكن t من المجال $[0,x]$ لدينا : $\frac{1}{1+2x} \leq \frac{1}{1+2t} \leq 1$ — 0,25 ن

2) ليكن x عنصرا من المجال $]0,1]$

أ) بين أن $F(x) = \frac{2}{x^2}\int_0^x \frac{t}{1+2t}dt$ — 0,50 ن

ب) بين أن $\frac{1}{1+2x} \leq F(x) \leq 1$ ثم استنتج أن الدالة F متصلة على اليمين في 0 — 0,75 ن

3) باستعمال تقنية المكاملة بالأجزاء بين أن : — 0,75 ن

$$\forall x\epsilon[0,1] \;:\; \int_0^x \frac{2t}{1+2t}dt = \frac{x^2}{1+2x} + 2\int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 dt$$

4) ليكن x عنصرا من المجال $]0,1]$

أ) بين أن : $F'(x) = \frac{-4}{x^3}\int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 dt$ — 0,50 ن

ب) بين أن : $\frac{-4}{3} \leq F'(x) \leq \frac{-4}{3(1+2t)^2}$ — 0,75 ن

ج) بتطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على الدالة F في المجال $[0,x]$ بين أن : — 0,75 ن

$$\frac{-4}{3} \leq \frac{F(x)-F(0)}{x} \leq \frac{-4}{3(1+2x)^2}$$

د) استنتج أن الدالة F قابلة للإشتقاق على اليمين في 0 محددا عددها المشتق على اليمين في 0 — 0,25 ن