الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

الدورة العادية 2020

- الموضوع -

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني والتعليم العالي والبحث العلمي
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

SSSSSSSSSSSSSSSSSSSS | NS 24

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	4
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	المعامل	9

- المدة الزمنية لإنجاز الموضوع هي 4 ساعات.
- يتكون الموضوع من (5) صفحات مرقمة من 1/5 إلى 5/5
- يتكون الموضوع من أربعة تمارين مستقلة فيما بينها.
- **المترشح ملزم بانجاز التمرين3 و التمرين4 و الاختيار بين انجاز إما التمرين1 و إما التمرين2**
- **على المترشح أن ينجز في المجموع ثلاثة (3) تمارين:**

- **التمرين1** و يتعلق بالحسابيات **(اختياري)**.................................. **3.5 نقط**
  و إما
  التمرين2 ويتعلق بالبنيات الجبرية **(اختياري)**.............................. **3.5 نقط**
- **التمرين3** و يتعلق بالأعداد العقدية **(إجباري)**.................................. **3.5 نقط**
- **التمرين4** و يتعلق بالتحليل **(إجباري)**.. **13 نقطة**

لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة كيفما كان نوعها

اختر وأنجز إما التمرين1 وإما التمرين2

و أنجز إجباريا التمرين3 و التمرين4

التمرين1: (3.5 نقط/ اختياري) **(إذا اخترت إنجاز التمرين1 فلا تنجز التمرين2)**

نعتبر في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة $(D)\ :\ 7x^3-13y=5$

1- ليكن (x,y) من $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ حلا للمعادلة (D)

0.5	أ) بين أن x و 13 أوليان فيما بينهما.
0.5	ب) استنتج أن: $x^{12}\equiv 1\ [13]$
1	ج) بين أن: $x^3\equiv 10\ [13]$
0.5	د) استنتج أن: $x^{12}\equiv 3\ [13]$
1	2- استنتج من الأسئلة السابقة أن المعادلة (D) لا تقبل حلا في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

التمرين2: (3.5 نقطة/اختياري) (إذا اخترت إنجاز التمرين2 فلا تنجز التمرين1)

نرمز بالرمز $M_2(\mathbb{R})$ لمجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة الثانية.

نذكر أن $(M_2(R),+,\times)$ حلقة غير تبادلية و واحدية وحدتها $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ و أن $(\mathbb{R}^*,\times)$ زمرة تبادلية.

نعتبر المجموعة الجزئية E من $M_2(\mathbb{R})$ المعرفة بما يلي: $E=\left\{\begin{pmatrix}1&x\\0&y\end{pmatrix} / \ x\in\mathbb{R}\ ;\ y\in\mathbb{R}^*\right\}$

0.5 | 1- أ) بين أن E جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}),\times)$

0.5 | ب) بين أن الضرب غير تبادلي في E

0.5 | ج) تحقق أن: $(\forall x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R}^*)\ ;\ \begin{pmatrix}1&x\\0&y\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&\frac{-x}{y}\\0&\frac{1}{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&\frac{-x}{y}\\0&\frac{1}{y}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&x\\0&y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

0.5 | 2- بين أن $(E,\times)$ زمرة غير تبادلية.

3- نعتبر المجموعة الجزئية F من E المعرفة بما يلي: $F=\left\{M(x)=\begin{pmatrix}1&x-1\\0&x\end{pmatrix} / x\in\mathbb{R}^*\right\}$

0.5 | أ) بين أن التطبيق φ المعرف بما يلي: $\varphi(x)=M(x)\ ;\ (\forall x\in\mathbb{R}^*)$ تشاكل من $(\mathbb{R}^*,\times)$ نحو $(E,\times)$

1 | ب) استنتج أن $(F,\times)$ زمرة تبادلية يجب تحديد عنصرها المحايد.

التمرين3: (3.5 نقط/إجباري)

ليكن m عدد عقدي غير منعدم.

الجزء الأول:

نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z ، $(E)\quad:\quad z^3-2mz^2+2m^2z-m^3=0$

0.5 | 1- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) (لاحظ أن m حلا للمعادلة (E))

2- ليكن z_1 و z_2 حلي المعادلة (E) المخالفين للحل m

0.25 | أ) تحقق أن: $\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}=\frac{1}{m}$

0.5 | ب) في حالة: $m=1+e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، أكتب على الشكل الجبري z_1 و z_2

الجزء الثاني:

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر $(O;\vec{u},\vec{v})$

نعتبر النقط A و B ذات الألحاق على التوالي: $a=me^{i\frac{\pi}{3}}$ و $b=me^{-i\frac{\pi}{3}}$

ليكن P مركز الدوران الذي زاويته $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ و يحول O إلى A

و Q مركز الدوران الذي زاويته $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ و يحول A إلى B

و R مركز الدوران الذي زاويته $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ و يحول B إلى O

1- بين أن النقط O و A و B غير مستقيمية. 0.25

2- أ) بين أن لحق P هو: $p=m\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$ وأن لحق R هو: $r=m\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{7\pi}{12}}$ 1

ب) بين أن لحق Q هو: $q=m\sqrt{2}\,sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ 0.5

3- بين أن $OQ=PR$ و أن المستقيمين (OQ) و (PR) متعامدان. 0.5

التمرين4: (13 نقطة/إجباري)

الجزء الأول:

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $I=[0;+\infty[$ بما يلي:

$f(0)=0$ و لكل x من $]0;+\infty[$ ، $f(x)=x^3\,ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

و ليكن (C) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i},\vec{j})$ (نأخذ: $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1cm$)

1- بتطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على الدالة $t\mapsto ln(t)$ في المجال $[x,x+1]$ ، بين أن: 0.5

$$\frac{1}{x+1}<ln\left(1+\frac{1}{x}\right)<\frac{1}{x} \quad ; \quad (\forall x\in]0;+\infty[) \qquad (P)$$

2- أ) باستعمال العبارة (P) بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 0.5

ب) باستعمال العبارة (P) بين أن المنحنى (C) يقبل فرعا شلجميا يتم تحديد اتجاهه. 0.5

3- أ) بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و أن : $$(\forall x\in]0;+\infty[)\quad ;\quad f'(x)=3x^2\left(ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{3(1+x)}\right)$$	0.75
ب) استنتج أن الدالة f تزايدية قطعا على I (يمكن استعمال العبارة (P))	0.5
ب) اعط جدول تغيرات f	0.25
4- لكل x من المجال $]0;+\infty[$ نضع: $g(x)=\frac{f(x)}{x}$	
أ) تحقق أن: $(\forall x\in]0;+\infty[)\quad ;\quad g'(x)=2x\left(ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{2(1+x)}\right)$ ثم استنتج أن الدالة g تزايدية قطعا على $\mathbb{R}_+^*$	0.75
ب) بين أن المعادلة $g(x)=1$ تقبل على $\mathbb{R}_+^*$ ، حلا وحيدا نرمز إليه بالرمز α ثم تحقق أن α ينتمي إلى المجال $]1;2[$ (ناخذ: $ln2=0.7$ و $ln\frac{3}{2}=1.5$)	0.5
د) استنتج أن الحلول الوحيدة للمعادلة $f(x)=x$ هي: 0 و α	0.5
5-أ) مثل مبيانيا المنحنى (C) (حدد نصف المماس على اليمين في النقطة O و الفرع الشلجمي للمنحنى (C))	0.5
ب) بين أن الدالة f تقابل من I نحو I (نرمز بالرمز f^{-1} لتقابلها العكسي)	0.25

الجزء الثاني:

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي: $0<u_0<\alpha$ و لكل n من $\mathbb{N}$ ، $u_{n+1}=f^{-1}(u_n)$

1- بين بالترجع أن: $0<u_n<\alpha\quad ;\quad (\forall n\in\mathbb{N})$	0.5
2- أ) بين أن: $g(]0;\alpha[)=]0;1[$	0.5
ب) استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ تزايدية قطعا.	0.5
ج) بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة.	0.25
3- حدد $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	0.5

الجزء الثالث:

نعتبر الدالة F المعرفة على المجال I بما يلي: $F(x)=\int_x^1 f(t)dt\quad ;\quad (\forall x\in I)$

1- أ) أدرس حسب قيم x ، إشارة $F(x)$	0.5

0.5 ب) بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على I و حدد مشتقتها الأولى F'

0.25 ج) استنتج أن F تناقصية قطعا على I

0.5 2- أ) بين أن: $F(x)\leq(1-x)ln2 \quad ; \quad (\forall x\in[1;+\infty[)$

0.25 ب) استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$

0.5 3- أ) باستعمال مكاملة بالأجزاء، بين أن:

$$(\forall x\in]0;+\infty[) \quad ; \quad F(x)=\frac{ln2}{4}-\frac{x^4}{4}ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{4}\int_x^1\frac{t^3}{t+1}dt$$

0.5 ب) أحسب $\int_x^1\frac{t^3}{t+1}dt$ لكل x من $]0;+\infty[$ (لاحظ أن : $\frac{t^3}{1+t}=t^2-t+1-\frac{1}{1+t}$)

0.5 ج) استنتج أن: $F(x)=\frac{5}{24}-\frac{x^3}{12}+\frac{x^2}{8}-\frac{x}{4}+\frac{1}{4}ln(1+x)-\frac{x^4}{4}ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \quad ; \quad (\forall x\in]0;+\infty[)$

0.5 د) احسب $\lim\limits_{x\to0^+} F(x)$ ثم استنتج قيمة : $\int_0^1 f(t)dt$

4- لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n نضع: $v_n=\sum\limits_{k=0}^{k=n-1}\left(F\left(\frac{2k+1}{2n}\right)-F\left(\frac{k}{n}\right)\right)$

0.5 أ) بين أنه لكل عدد صحيح طبيعي n من $\mathbb{N}^*$ و لكل عدد صحيح طبيعي k من $\{0,1,,,,,,,,,n-1\}$:

$$-\frac{1}{2n}f\left(\frac{2k+1}{2n}\right)\leq F\left(\frac{2k+1}{2n}\right)-F\left(\frac{k}{n}\right)\leq-\frac{1}{2n}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

0.5 ب) استنتج أن: $-\frac{1}{2n}\sum\limits_{k=1}^{k=n}f\left(\frac{k}{n}\right)\leq v_n\leq-\frac{1}{2n}\sum\limits_{k=0}^{k=n-1}f\left(\frac{k}{n}\right) \quad ; \quad (\forall n\in\mathbb{N}^*)$

(لاحظ أن: $\frac{2k+1}{2n}<\frac{k+1}{n}$)

0.25 ج)- بين أن المتتالية العددية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة ثم حدد نهايتها.

انتهى