التمرين الأول

1) أ) نفترض أن $a = i\overline{a}$ إذن $a - i\overline{a} = 2a$ و $i|a|^2 = ia\overline{a} = -a^2$ و منه :

$$(E) \Leftrightarrow z^2 - 2az + a^2 = 0 \Leftrightarrow (z-a)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(z + i\overline{a}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(z + i\overline{a}\right) = 0$$

نستنتج أن

$$\boxed{(E) \Leftrightarrow \left(z + i\overline{a}\right) = 0}$$

ب) لدينا $a + i$ حل للمعادلة (E) يكافئ على التوالي:

$$(a+i)^2 + \left(a - i\overline{a}\right)(a+i) - i|z|^2 = 0$$

$$a^2 + 2ia - 1 - \left(a^2 + ai - ia\overline{a} + \overline{a}\right) - ia\overline{a} = 0$$

$$ai - 1 - \overline{a} = 0$$

$$\mathcal{Re}(a)i - \mathcal{Im}(a) - 1 - \mathcal{Re}(a) + i\mathcal{Im}(a) = 0$$

$$\mathcal{Re}(a) + \mathcal{Im}(a) = -1 \text{ و } \mathcal{Re}(a) + \mathcal{Im}(a) = 0$$

العبارة الاخيرة خاطئة إذن $(a+i)^2 + \left(a - i\overline{a}\right)(a+i) - i|z|^2 \neq 0$ و منه :

$$\boxed{a + i \text{ ليس حل للمعادلة } (E)}$$

2) أ) حساب مميز المعادلة (E):

لدينا: $\Delta = \left(a - i\overline{a}\right)^2 + 4i|a|^2 = a^2 - 2ia\overline{a} + \left(i\overline{a}\right)^2 + 4ia\overline{a} = a^2 + 2ia\overline{a} + \left(i\overline{a}\right)^2 = \left(a + i\overline{a}\right)^2$

إذن

$$\boxed{\Delta = \left(a + i\overline{a}\right)^2}$$

ب) بما أن $\overline{a} \neq ia \Rightarrow a \neq i\overline{a} \Rightarrow \Delta \neq 0$ فإن للمعدلة (E) حلين عقديين مختلفين هما:

$$z_1 = \frac{a - i\overline{a} + a - i\overline{a}}{2} = a = \left[|a|, \theta\right] \text{ و } z_2 = \frac{a - i\overline{a} - a + i\overline{a}}{2} = i\overline{a} = \left[|a|, -\frac{\pi}{2} - \theta\right]$$

إذن حلي المعادلة على الشكل المثلثي هما:

$$\boxed{\left[|a|, -\frac{\pi}{2} - \theta\right] \text{ و } \left[|a|, \theta\right]}$$

3) أ) لدينا : $OA = |a|$ و $OB = \left|-i\overline{a}\right| = |-i| \times \left|\overline{a}\right| = |a|$

إذن

$$\boxed{OA = OB}$$

و لدينا $\overline{\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}\right)} \equiv Arg\left(\frac{a}{-i\overline{a}}\right) \equiv Arg\left(\frac{ia^2}{a\overline{a}}\right) \equiv Arg(i) + 2Arg(a) - Arg\left(a\overline{a}\right) \equiv \frac{\pi}{2} + 2\theta\left[2\pi\right]$

إذن

$$\boxed{\overline{\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}\right)} \equiv \frac{\pi}{2} + 2\theta\left[2\pi\right]}$$

ب) لدينا $a \neq 0$ و $a \neq -i\overline{a}$ إذن النقط O و A و B مختلفة مثنى مثنى و منه

النقط) O و A و B مستقيمية (يكافئ $\overline{\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}\right)} \equiv 0\left[\pi\right]$. ونعلم أن $\overline{\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}\right)} \equiv \frac{\pi}{2}+2\theta\left[2\pi\right]$

النقط) O و A و B مستقيمية (يكافئ $\frac{\pi}{2}+2\theta \equiv 0\left[\pi\right]$.يعني $\theta \equiv \frac{-\pi}{4}\left(\frac{\pi}{2}\right)$

وبما أن $\theta \in \left]-\pi,\pi\right[$ فإن القيم الممكنة ل θ هي $\frac{-\pi}{4}+\frac{k\pi}{2} \ / \ k \in \left\{-1,0,1,2\right\}$ و منه :

القيم الممكنة ل θ بحيث تكون النقط O و A و B مستقيمية هي $\frac{-3\pi}{4},\frac{-\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}$

ج) لدينا $\left(OA\right)\perp\left(OB\right) \Leftrightarrow \overline{\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}\right)} \equiv \frac{\pi}{2}\left[\pi\right] \Leftrightarrow \frac{\pi}{2}+2\theta \equiv \frac{\pi}{2}\left[\pi\right] \Leftrightarrow \theta \equiv 0\left[\frac{\pi}{2}\right]$

وبما أن $\theta \in \left]-\pi,\pi\right[$ فإن القيم الممكنة ل θ هي $\frac{k\pi}{2} \ / \ k \in \left\{-1,0,1\right\}$.

خلاصة :

القيم الممكنة ل θ بحيث يكون $\left(OA\right)\perp\left(OB\right)$ هي $\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{0},\frac{\pi}{2}$

4) أ) بما أن $\theta \notin \left\{\frac{-3\pi}{4},\frac{-\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right\}$ فأن النقط O و A و B غير مستقيمية

لدينا : $aff\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right) = aff\left(\overrightarrow{OA}\right)+aff\left(\overrightarrow{OB}\right) = a-i\overline{a} = aff\left(\overrightarrow{ON}\right)$

إذن $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{ON}$ وهذه هي الخاصية المميزة لمتوازي أضلاع

و منه

الرباعي $OANB$ متوازي أضلاع

ب) بما أن النقط O و A و B و N غير مستقيمية و مختلفة مثنى مثنى فإن

(النقط O و A و B و N متداورة) $\Leftrightarrow \frac{aff\left(A\right)-aff\left(O\right)}{aff\left(A\right)-aff\left(B\right)}\times\frac{aff\left(N\right)-aff\left(B\right)}{aff\left(N\right)-aff\left(O\right)} \in \mathbb{R}^*$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{a+i\overline{a}}\times\frac{a-i\overline{a}+i\overline{a}}{a-i\overline{a}} \in \mathbb{R}^*$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{a^2+\overline{a}^2} \in \mathbb{R}^*$$

$$\Leftrightarrow a^2 \in \mathbb{R}^*$$

$$\Leftrightarrow a^2 = \overline{a^2}$$

$$\Leftrightarrow a=\overline{a} \text{ أو } a=-\overline{a}$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{Re}\left(a\right)=0 \text{ أو } \mathcal{Im}\left(a\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{Re}\left(a\right)\times\mathcal{Im}\left(a\right)=0$$

(النقط O و A و B و N متداورة) $\Leftrightarrow \mathcal{Re}\left(a\right)\times\mathcal{Im}\left(a\right)=0$

التمرين الأول 3) ج)

مجموعة النقط $A(a)$ بحيث تكون النقط O و A و B و N متداورة هي مجموعة النقط $A(a)$ بحيث $\mathcal{Re}(a)\times\mathcal{Im}(a)=0$

لنرمز لهذه المجموعة ب E لدينا $E=\{A(a);\mathcal{Re}(a)=0\}\cup\{A(a);\mathcal{Im}(a)=0\}$ حيث $a\in\mathbb{C}^*$

إذن

E هي اتحاد محوري المعلم محروم من الأصل

التمرين الثاني

1) أ) لدينا $(\forall z\in\mathbb{C}-\{i\});f(z)-1=\dfrac{\overline{z}-i}{\overline{z}+i}-1=\dfrac{\overline{z}-i-\overline{z}-i}{\overline{z}+i}=\dfrac{-2i}{\overline{z}+i}$

إذن

$$\boxed{(\forall z\in\mathbb{C}-\{i\});f(z)-1=\frac{-2i}{\overline{z}+i}}$$

بما أن $f(z)\neq 1$ فإن $aff(M'(f(z)))\neq aff(A)$ و منه :

$$\boxed{M'\neq A}$$

ب) لدينا

$$\begin{cases} AM'\times BM=|f(z)-1|\times|z-i|=\left|\dfrac{-2i}{\overline{z}+i}\right|\times\left|\overline{z+i}\right|=2\\ \overline{(\overrightarrow{AM'},\overrightarrow{BM})}\equiv Arg\left(\dfrac{z-i}{f(z)-1}\right)\equiv Arg\left(\dfrac{\overline{z+i}(\overline{z}+i)}{-2i}\right)\equiv 0+Arg(2i)\equiv\dfrac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$$ إذن

$$\boxed{\begin{cases} AM'\times BM=2\\ \overline{(\overrightarrow{AM'},\overrightarrow{BM})}\equiv\dfrac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}}$$

ج) $M\in\Gamma(B,1)$ يعني $MB=1$

نستنتج حسب السؤال السابق أن $\begin{cases} AM'=2\\ (AM')\perp(BM)\end{cases}$

نستنتج أن

M' هي نقطة تقاطع (الدائرة ذات المركز A و الشعاع 2) و(المستقيم العمودي على (BM) و المار من A) بحيث تكون الزاوية $\overline{(\overrightarrow{AM'},\overrightarrow{BM})}$ مباشرة.

د) لنبين أن $BM=1$

$$BM=\left|\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)i-i\right|=\left|\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right|=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$ إذن

$$\boxed{M\in(\Gamma)}$$

2) $\forall \theta \in \left]0,2\pi\right[; \forall z \in \mathbb{C}-\{i\}$

لدينا $f(z)=e^{i\theta} \Leftrightarrow \dfrac{\overline{z}-i}{\overline{z}+i}=e^{i\theta} \Leftrightarrow z+i=(z-i)e^{-i\theta} \Leftrightarrow z=\dfrac{i\left(e^{-i\theta}+1\right)}{e^{-i\theta}-1}$

ولدينا $\dfrac{i\left(e^{-i\theta}+1\right)}{e^{-i\theta}-1}=i\dfrac{e^{\frac{-i\theta}{2}}+e^{\frac{i\theta}{2}}}{e^{\frac{-i\theta}{2}}-e^{\frac{i\theta}{2}}}=i\dfrac{2\cos\frac{\theta}{2}}{-2i\sin\frac{\theta}{2}}=-\cot an\dfrac{\theta}{2}$

إذن

$$\boxed{f(z)=e^{i\theta} \Leftrightarrow z=-\cot an\frac{\theta}{2}}$$

3) أ) ليكن $[r,\theta]$ جدرا مكعبا ل $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$ لدينا

$$[r,\theta]^3=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i) \Leftrightarrow [r^3,3\theta]=\left[1,\frac{3\pi}{4}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} r^3=1 \\ 3\theta=\frac{3\pi}{4}+2k\pi \ / \ k\in\{0,1,2\} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r=1 \\ \theta=\frac{(3+8k)\pi}{12} \\ k\in\{0,1,2\} \end{cases}$$

الجدور المكعبة ل $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$ هي

$$\boxed{\left[1,\frac{\pi}{4}\right];\left[1,\frac{11\pi}{12}\right];\left[1,\frac{19\pi}{12}\right]}$$

ب) لدينا : $2\left(\overline{z}-i\right)^3=\sqrt{2}(-1+i)\left(\overline{z}+i\right)^3 \Leftrightarrow \left(\dfrac{\overline{z}-i}{\overline{z}+i}\right)^3=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(-1+i) \Rightarrow (f(z))^3=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$

نستنتج أن $f(z)$ هو أحد الجدور المكعبة ل $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$ ومنه $f(z)\in\left\{e^{i\frac{\pi}{4}};e^{i\frac{11\pi}{12}};e^{i\frac{19\pi}{12}}\right\}$ و حسب السؤال 2)

نستنتج أن $z\in\left\{-\cotan\dfrac{\pi}{8};-\cotan\dfrac{11\pi}{24};-\cotan\dfrac{19\pi}{24}\right\}$

تحديد قيم الحلول

$$1=\tan\frac{\pi}{4}=\tan 2\frac{\pi}{8}=\frac{2\tan\frac{\pi}{8}}{1-\tan^2\frac{\pi}{8}} \Leftrightarrow \tan^2\frac{\pi}{8}+2\tan\frac{\pi}{8}-1=0 \Leftrightarrow \left(\tan\frac{\pi}{8}-1\right)^2-2=0 \Leftrightarrow \tan\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$$

$2-\sqrt{3}=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}=\tan\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{2\tan\frac{\pi}{24}}{1-\tan^2\frac{\pi}{24}}$ بوضع $x=\tan\dfrac{\pi}{24}$ نحصل على $x^2+2\left(2+\sqrt{3}\right)x-1=0$

الحل الموجب لهذه المعادلة هو $-\left(2+\sqrt{3}\right)+2\sqrt{2+\sqrt{3}}$ نستنتج أن $\tan\dfrac{\pi}{24}=-\left(2+\sqrt{3}\right)+2\sqrt{2+\sqrt{3}}$

لدينا $\tan\frac{11\pi}{24} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{24}\right) = \text{cotan}\,\frac{\pi}{24} = \frac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{3}} - \left(2+\sqrt{3}\right)} = 2\sqrt{2+\sqrt{3}} + 2 + \sqrt{3}$

و لدينا $\text{cotan}\,\frac{11\pi}{24} = \frac{1}{\tan\frac{\pi}{24}} = 2\sqrt{2+\sqrt{3}} - \left(2+\sqrt{3}\right)$

و $\tan\frac{19\pi}{24} = \tan\left(\pi - \frac{5\pi}{24}\right) = -\tan\frac{5\pi}{24} = -\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{24}\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{24} - 1}{1 + \tan\frac{\pi}{24}} = \frac{\left(3+\sqrt{3}\right) - 2\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\left(1+\sqrt{3}\right) - 2\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

$$\text{cotan}\,\frac{19\pi}{24} = \frac{\left(1+\sqrt{3}\right) - 2\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\left(3+\sqrt{3}\right) - 2\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \sqrt{3} + 2 - 2\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

مجموعة حلول المعادلة المقترحة هي إذن:

$$\boxed{S = \left\{-2\sqrt{2+\sqrt{3}} - 2 - \sqrt{3}; \left(2+\sqrt{3}\right) - 2\sqrt{2+\sqrt{3}}; 2\sqrt{2+\sqrt{3}} - 2 - \sqrt{3}\right\}}$$