Exercice 1

1 Calculer et simplifier :

- $A = 2\sqrt{9} - \sqrt{25} = 2\sqrt{3^2} - \sqrt{5^2} = 2 \times 3 - 5 = 6 - 5 = \boxed{1}$
- $B = \dfrac{\sqrt{300}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\dfrac{300}{3}} = \sqrt{100} = \sqrt{10^2} = \boxed{10}$
- $C = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-2} = \sqrt{2}^2 = \boxed{2}$
- $D = \sqrt{18} + \sqrt{8} - 5\sqrt{2} = \sqrt{3^2 \times 2} + \sqrt{2^2 \times 2} - 5\sqrt{2} = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = (3 + 2 - 5)\sqrt{2} = \boxed{0}$

2 Développer et réduire :

- $E = \left(4 + \sqrt{13}\right)\left(4 - \sqrt{13}\right) = 4^2 - \sqrt{13}^2 = 16 - 13 = \boxed{3}$
- $F = \left(2 + \sqrt{5}\right)^2 - 4\sqrt{5} = 2^2 + 2 \times 2 \times \sqrt{5} + \sqrt{5}^2 - 4\sqrt{5} = 4 + 4\sqrt{5} + 5 - 4\sqrt{5} = \boxed{9}$

3 (a) Écrire sans "$\sqrt{\ }$" au dénominateur :

- $X = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \dfrac{3 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}^2} = \dfrac{3\sqrt{3}}{3} = \boxed{\sqrt{3}}$
- $Y = \dfrac{2}{\sqrt{3} - 1} = \dfrac{2\left(\sqrt{3} + 1\right)}{\left(\sqrt{3} - 1\right)\left(\sqrt{3} + 1\right)} = \dfrac{2\left(\sqrt{3} + 1\right)}{\sqrt{3}^2 - 1^2} = \dfrac{2\left(\sqrt{3} + 1\right)}{3 - 1} = \dfrac{2\left(\sqrt{3} + 1\right)}{2} = \boxed{\sqrt{3} + 1}$

(b) D'après la question 3)a) on a : $X - Y = \sqrt{3} - (\sqrt{3} + 1) = \sqrt{3} - \sqrt{3} - 1 = \boxed{-1}$

4 Donner l'écriture scientifique du nombre :

$$M = 7 \times 10^{15} \times 0,005 = 7 \times 0,5 \times 10^{-2} \times 10^{15} = \boxed{3,5 \times 10^{13}}$$

Exercice 2

1 On a : $4^2 - \left(3\sqrt{2}\right)^2 = 16 - 18 = -2 < 0$, alors $4^2 < \left(3\sqrt{2}\right)^2$, donc $\boxed{4 < 3\sqrt{2}}$,

alors $4 + 2\sqrt{2} < 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2}$, d'où $\boxed{4 + 2\sqrt{2} < 5\sqrt{2}}$

2 x et y deux nombres réels tels que : $3 \leq x \leq 5$ et $2 \leq y \leq 6$

(a) Encadrer les nombres : $x + y$ et $2x$.

On a : $\begin{cases} 3 \leq x \leq 5 \\ 2 \leq y \leq 6 \end{cases}$, alors $3 + 2 \leq x + y \leq 5 + 6$, d'où $\boxed{5 \leq x + y \leq 11}$

On a : $3 \leq x \leq 5$, alors $2 \times 3 \leq 2 \times x \leq 2 \times 5$, d'où $\boxed{6 \leq 2x \leq 10}$

(b) On a : $\begin{cases} 6 \leq 2x \leq 10 \\ 5 \leq x + y \leq 11 \end{cases}$, alors $\begin{cases} 6 \leq 2x \leq 10 \\ \dfrac{1}{11} \leq \dfrac{1}{x + y} \leq \dfrac{1}{5} \end{cases}$, donc $6 \times \dfrac{1}{11} \leq 2x \times \dfrac{1}{x + y} \leq 10 \times \dfrac{1}{5}$,

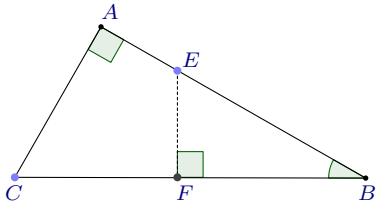
d'où $\boxed{\dfrac{6}{11} \leq \dfrac{2x}{x + y} \leq 2}$

3 On a : $b \leq 2$, et puisque a est positif, alors $b \times a \leq 2 \times a$, d'où $\boxed{ab \leq 2a}$

www.elmaths.com

Exercice 3

Partie I : ABC un triangle tel que : $AB = 4cm$; $AC = 2\sqrt{5}cm$; $BC = 6cm$



1 Dans le triangle ABC on a :
$AB^2 = 4^2 = 16$, $AC^2 = \left(2\sqrt{5}\right)^2 = 20$ et $BC^2 = 6^2 = 36$
Or $16 + 20 = 36$ On a donc bien $AB^2 + AC^2 = BC^2$
alors, d'après la réciproque du théorème de Pythagore,
le triangle ABC est rectangle en A.

2 Dans le triangle ABC rectangle en A on a : $\sin \widehat{ABC} = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{2\sqrt{5}}{6} = \boxed{\dfrac{\sqrt{5}}{3}}$

3 Soit E un point du segment $[AB]$ tels que $BE = 3cm$ et F le projeté orthogonale de E sur (BC).

a Dans le triangle BEF rectangle en F, on a : $\sin \widehat{ABC} = \dfrac{EF}{BE}$, donc $\dfrac{\sqrt{5}}{3} = \dfrac{EF}{3}$,

alors $EF = \dfrac{3 \times \sqrt{5}}{3}$, d'où $\boxed{EF = \sqrt{5}cm}$

b Puisque le triangle BEF est rectangle en F, alors d'après le théorème de Pythagore, on a :
$FB^2 = EB^2 - EF^2 = 3^2 - \sqrt{5}^2 = 9 - 5 = 4$, et puisque $FB > 0$, alors $\boxed{FB = \sqrt{4} = 2}$

Partie II :

1 x est la mesure d'un angle aigu tel que $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

a On sait que $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ et $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$, alors $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \left(\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 = 1 - \dfrac{2}{9} = \dfrac{7}{9}$,

Puisque $0 < \sin x < 1$, alors $\boxed{\sin x = \sqrt{\dfrac{7}{9}} = \dfrac{\sqrt{7}}{3}}$

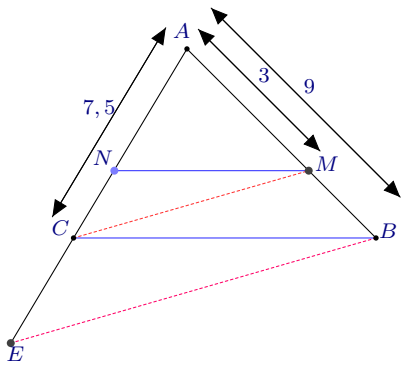
b On sait que $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, alors $\tan x = \dfrac{\frac{\sqrt{7}}{3}}{\frac{\sqrt{2}}{3}} = \dfrac{\sqrt{7}}{3} \times \dfrac{3}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} = \boxed{\dfrac{\sqrt{14}}{2}}$

2 On sait que $\tan \alpha = \dfrac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, alors $\dfrac{1}{\tan \alpha} = \dfrac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$, donc on aura :

$$\cos \alpha \times \sin \alpha \times \frac{1}{\tan \alpha} + \sin^2 \alpha = \cos \alpha \times \cancel{\sin \alpha} \times \frac{\cos \alpha}{\cancel{\sin \alpha}} + \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = \boxed{1}.$$

Exercice 4

Dans la figure ci-contre on a : $(MN) \parallel (BC)$; $AB = 9$; $AC = 7,5$; $AM = 3$



1 Dans le triangle ABC, on a :
$M \in (AB)$, $N \in (AC)$ et $(MN) \parallel (BC)$,

alors, d'après le théorème de Thalès on a :

$\dfrac{AN}{AC} = \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{MN}{BC}$, alors $AN = \dfrac{AC \times AM}{AB}$,

donc $AN = \dfrac{7,5 \times 3}{9}$, d'où $\boxed{AN = 2,5}$

2 E un point de la demi-droite $[AC)$ tel que $AE = 3AC$

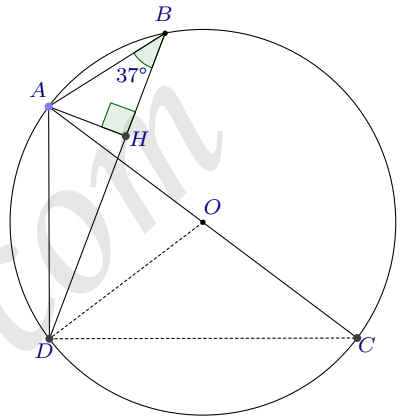
www.emaths.com

a On a : $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3}$ et $\dfrac{AC}{AE} = \dfrac{AC}{3AC} = \dfrac{1}{3}$, donc $\boxed{\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AC}{AE}}$

b Dans le triangle ABE on a : $M \in (AB)$, $C \in (AE)$ et $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AC}{AE}$, et les points A, M, B et A, C, E dans le même ordre, alors, d'après la réciproque du théorème de Thalès on a : $\boxed{(BE) \parallel (CM)}$

Exercice 5

A, B, C, D quatre points d'un cercle (C) de centre O et de diamètre $[AB]$.
H est le projeté orthogonale de A sur (BD) et $\widehat{ABD} = 37°$



1 Calculer $\widehat{AOD}$ et $\widehat{ACD}$

$\widehat{ABD}$ est un angle inscrit au cercle (C) associé à l'angle au centre $\widehat{AOD}$. Alors : $\boxed{\widehat{AOD} = 2 \times \widehat{ABD} = 2 \times 37° = 74°}$

$\widehat{ACD}$ et $\widehat{ABD}$ sont deux angles inscrits dans le cercle (C) qui interceptent le même arc. donc : $\boxed{\widehat{ACD} = \widehat{ABD} = 37°}$

2 Montrer que : $\widehat{ADC} = 90°$

ADC est un triangle inscrit au cercle de diamètre $[AC]$, donc ADC est rectangle en D, donc $\boxed{\widehat{ADC} = 90°}$

3 Montrer que les triangles AHB et ADC sont semblables.

Les triangles AHB et ADC ont :

$\widehat{AHB} = \widehat{ADC} = 90°$, $\widehat{ABH} = \widehat{ACD} = 37°$

donc d'après le 1er Cas de similitude : les deux triangles AHB et ADC sont semblables.

4 En déduire que : $AC \times AH = AD \times AB$

On sait que AHB et ADC sont semblables, donc les longueurs des côtés homologues sont proportionnelles. Donc : $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{AD}{AH} = \dfrac{DC}{BH}$, donc $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{AD}{AH}$, donc $\boxed{AC \times AH = AD \times AB}$

www.elmaths.com
www.facebook.com/elmaths1