Exercice 1 (6 points)

1 Résoudre les équations suivantes : **(1.5pts)**

On a : $3(x-1)=5-x$
donc : $3(x-1)=5-x$
donc : $3x-3=5-x$
donc : $3x+x=5+3$
donc : $4x=8$
donc : $x=\dfrac{8}{4}$
donc : $x=2$

La solution de cette équation est 2

On a : $x\sqrt{3}-1=x+\sqrt{3}$
donc : $x\sqrt{3}-1=x+\sqrt{3}$
donc : $x\sqrt{3}-x=\sqrt{3}+1$
donc : $x\left(\sqrt{3}-1\right)=\sqrt{3}+1$
donc : $x=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$
donc : $x=2+\sqrt{3}$

La solution de l'équation est $2+\sqrt{3}$

On a : $\dfrac{2x-1}{3}=\dfrac{x-1}{2}$
donc : $\dfrac{2x-1}{3}=\dfrac{x-1}{2}$
donc : $2(2x-1)=3(x-1)$
donc : $4x-2=3x-3$
donc : $4x-3x=-3+2$
donc : $x=-1$

La solution de l'équation est -1

2 **a** Vérifier que pour tout nombre réel x : $(x+1)^2-9=x^2+2x-8$ **(0.5pt)**

On a :

$$\begin{aligned}(x+1)^2-9&=x^2+2\times x\times 1+1^2-9\\&=x^2+2x+1-9\\&=x^2+2x-8\end{aligned}$$

D'où : $(x+1)^2-9=x^2+2x-8$

b En déduire les solutions de l'équation : $x^2+2x-8=0$ **(1pt)**

L'équation : $x^2+2x-8=0$ est équivalente à l'équation : $(x+1)^2-9=0$, alors on a :

$$\begin{aligned}&x^2+2x-8=0\\&(x+1)^2-9=0\\&(x+1)^2-3^2=0\\&(x+1-3)(x+1+3)=0\\&(x-2)(x+4)=0\\&x-2=0 \text{ ou } x+4=0\\&x=2 \text{ ou } x=-4\end{aligned}$$

D'où : les solutions de cette équation sont -4 et 2

3 On considère l'inéquation $(I) : 3x+5\leq 3+5x$

a Le nombre -2 est-il solution de l'inéquation (I) ? Justifier la réponse. **(0.5pt)**

On a : $\begin{cases}3\times(-2)+5=-6+5=-1\\3+5\times(-2)=3-10=-7\end{cases}$. Puisque $-1>-7$,

D'où : le nombre -2 n'est pas une solution de l'inéquation (I).

(b) Résoudre l'inéquation (I). **(1pt)**

$$\begin{aligned} 3x+5 &\leq 3+5x \\ 3x-5x &\leq 3-5 \\ -2x &\leq -2 \\ x &\geq \frac{-2}{-2} \quad (\text{ car } -2 \text{ est négatif }) \\ x &\geq 1 \end{aligned}$$

D'où : les solutions de l'inéquation (I) sont tous les nombres réels supérieur ou égaux à 1

4 Problème. **(1.5pts)**

1. Choix de l'inconnue.

Soit x le nombre d'années cherché.

2. Mise en équation.

Dans x années, l'âge de Ahmed sera $15+x$, et l'âge du père sera $42+x$, et puisque dans x années, l'âge du père sera le double de l'âge de Ahmed, alors l'équation est : $2(15+x)=42+x$

3. Résolution de l'équation.

$$\begin{aligned} 2(15+x) &= 42+x \\ 30+2x &= 42+x \\ 2x-x &= 42-30 \\ x &= 12 \end{aligned}$$

4. Vérification et retour au problème.

Dans 12ans l'age du Ahmed sera $15+12=27$ans et l'age du père sera $42+12=54$ans et on a : $27\times 2=54$

D'où : dans 12 ans, l'âge du père sera le double de l'âge du fils.

Exercice 2 (6 points)

1 Soit (S) le système : $\begin{cases} 5x+2y=30 & (1) \\ x+3y=19 & (2) \end{cases}$

(a) Le couple $(-4;25)$ est-il solution du système (S) ? Justifier la réponse. **(0.5pt)**

On a : $\begin{cases} 5\times(-4)+2\times 25=-20+50=30 \\ -4+3\times 25=-4+75=71\neq 19 \end{cases}$

D'où : le couple $(-4;25)$ n'est pas une solution du système (S)

(b) Résoudre le système (S) **(1.5pts)**

On exprime x en fonction de y dans l'équation (2), on obtient : $x=19-3y \quad (3)$

On remplace x par $19-3y$ dans l'équation (1), on obtient :

$$\begin{aligned} 5(19-3y)+2y &= 30 \\ 95-15y+2y &= 30 \\ -15y+2y &= 30-95 \\ -13y &= -65 \\ y &= \frac{-65}{-13} = \boxed{5} \end{aligned}$$

On remplace y par 5 dans l'équation (3), on obtient : $x=19-3\times 5=4$

D'où : le couple $(4;5)$ est solution du système (S)

c) Problème. **(1pt)**

1. Choix des inconnues.

Soient x le prix d'un stylo et y le prix d'un crayon.

2. Mise en système.

On a : $10x+4y=60$ et $x+3y=19$, alors le système est : $\begin{cases} 10x+4y=60 \\ x+3y=19 \end{cases}$

3. Résolution du système.

On a : $\begin{cases} 10x+4y=60 & (1) \\ x+3y=19 & (2) \end{cases}$

On divise les deux membres de l'équation (1) par 2, on obtient le système (S) : $\begin{cases} 5x+2y=30 \\ x+3y=19 \end{cases}$

D'après la question **1.b**, on a $x=4$ et $y=5$

4. Vérification et retour au problème.

On a : $\begin{cases} 10\times 4+4\times 5=40+20=60 \\ 4+3\times 5=4+15=19 \end{cases}$

D'où : le prix d'un stylo est 4DH et le prix d'un crayon est 5DH

2 Problème. **(1.5pts)**

1. Choix des inconnues.

Soient x et y les deux nombres cherchés.

2. Mise en système.

On a : $x-y=16$ et $(x+14)+(y+14)=26$, alors le système est : $\begin{cases} x-y=16 \\ (x+14)+(y+14)=26 \end{cases}$

alors : $\begin{cases} x-y=16 \\ x+y=26-28 \end{cases}$, alors les système est : $\begin{cases} x-y=16 \\ x+y=-2 \end{cases}$

3. Résolution du système.

On a : $\begin{cases} x-y=16 & (1) \\ x+y=-2 & (2) \end{cases}$

On additionne les deux équations membre à membre, on obtient : $x-y+x+y=16-2$,

donc $2x=14$, donc $x=\dfrac{14}{2}=7$

On remplace x par 7 dans l'équation (2), on obtient : $7+y=-2$, alors $y=-2-7=-9$

4. Vérification et retour au problème.

On a : $\begin{cases} 7-(-9)=16 \\ (7+14)+(-9+14)=26 \end{cases}$

D'où : les deux nombres cherchés sont 7 et -9

3 Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(0;I;J)$, on considère les droites (D) et (D') d'équations respectives : $(D) : y=2x-3$ et $(D) : y=-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{7}{3}$ (Voir figure ci-dessous)

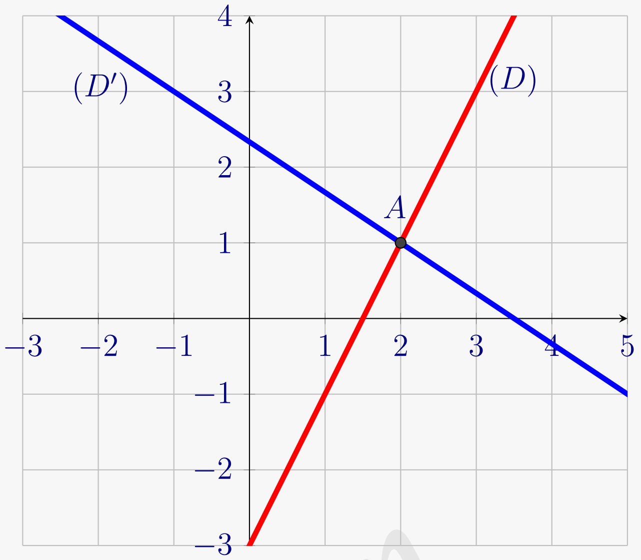
Résoudre graphiquement le système suivant : $\begin{cases} 2x-y-3=0 \\ 2x+3y-7=0 \end{cases}$ **(1.5pts)**

On a : $\begin{cases} 2x - y - 3 = 0 \\ 2x + 3y - 7 = 0 \end{cases}$

Donc : $\begin{cases} y = 2x - 3 \\ 3y = -2x + 7 = 0 \end{cases}$

Donc : $\begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{7}{3} \end{cases}$

Puisque : $\begin{cases} (D): \quad y = 2x - 3 \\ (D'): \quad y = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{7}{3} \end{cases}$



D'après la figure les deux droites (D) et (D') sont sécante en un seul point point $A(2;1)$,

D'où : le couple $(2;1)$ est solution de ce système

Exercice 3 (3 points)

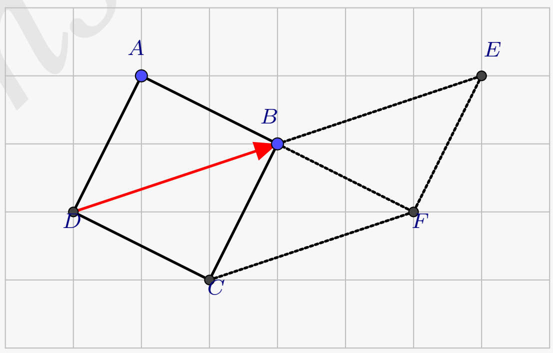
Soit $ABCD$ un carré. Le point E est le symétrique du point D par rapport à B et le point F est l'image de C par la translation qui transforme D en B.

1 a) Construire une figure convenable. **(0.75pt)**

b) Déterminer la nature du quadrilatère $BFCD$. **(0.5pt)**

Puisque F est l'image de C par la translation qui transforme D en B, alors : $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{DB}$

D'où : $BFCD$ est un parallélogramme.



2 Montrer que B est le milieu du segment $[AF]$ **(0.75pt)**

Puisque $ABCD$ est un carré, alors : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ $\quad (1)$ $\Big($Car E est le symétrique de B par rapport à $B\Big)$

Puisque $BFCD$ est un parallélogramme, alors : $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{DC}$ $\quad (2)$ $\Big($D'après la question **1.b**$\Big)$

D'après (1) et (2), on en déduit que : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BF}$

D'où : B est le milieu de $[AF]$

3 Déterminer la nature du quadrilatère $BCFE$. **(0.5pt)**

On a B est le milieu de $[DE]$, alors : $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{DB}$ $\quad (1)$

Puisque $BFCD$ est un parallélogramme, alors : $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{DB}$ $\quad (2)$

D'après (1) et (2), on a : $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CF}$, alors : $BCFE$ est un parallélogramme

4 Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{EBF}$ (Justifier la réponse) **(0.5pt)**

On a B, F, E sont des images respectifs des points D, C, B par la translation qui transforme D en B, alors le triangle BFE est l'image du triangle DCB par la translation qui transforme D en B.

Puisque DCB est rectangle et isocèle en C (car $ABCD$ est un carré), alors BFE est un triangle rectangle et isocèle en F, d'où : $\widehat{EBF} = \widehat{BEF} = 45°$

Exercice 4 (5 points)

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; I; J)$, on considère les points $A(2; 1)$ et $B(0; 3)$

1 a) Déterminer le couple des coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et vérifier que $AB = 2\sqrt{2}$ **(1pt)**

$$\overrightarrow{AB}\left(x_B - x_A; y_B - y_A\right)$$
$$\overrightarrow{AB}\left(0-2; 3-1\right)$$
$$\boxed{\overrightarrow{AB}\left(-2; 2\right)}$$

$$AB = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = \boxed{2\sqrt{2}}$$

b) Déterminer le couple des coordonnées du milieu M de $[AB]$ **(0.5pt)**

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$
$$M\left(\frac{2+0}{2}; \frac{1+3}{2}\right)$$
$$M\left(\frac{2}{2}; \frac{4}{2}\right)$$
$$\boxed{M\left(1; 2\right)}$$

2 a) Vérifier que le coefficient directeur de la droite (AB) est -1. **(0.5pt)**

Soit m est le coefficient directeur de la droite (AB), alors :

$$m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{1-3}{2-0} = \frac{-2}{2} = \boxed{-1}$$

b) Déterminer l'équation réduite de la droite (AB). **(1pt)**

On a $(AB): \ y = mx + p$, alors $(AB): \ y = -x + p$

Puisque $B \in (AB)$, alors : $y_B = -x_B + p$, alors : $3 = -0 + p$, alors : $\boxed{p = 3}$

D'où : l'équation réduite de la droite (AB) est : $y = -x + 3$.

3 a) Montrer que l'équation réduite de la médiatrice (Δ) du segment $[AB]$ est : $y = x + 1$ **(1pt)**

Posons $(\Delta): \ y = m'x + p'$.

On a (Δ) est la médiatrice de $[AB]$, alors : $(\Delta) \perp (AB)$ et $M \in (\Delta)$ (car M est le milieu de $[AB]$),

On a : $(\Delta) \perp (AB)$, alors : $m' \times m = -1$, alors $m' \times (-1) = -1$, alors : $\boxed{m' = 1}$

Puisque $M \in (\Delta)$, alors $y_M = m'x_M + p'$, alors : $p' = y_M - m'x_M$, alors : $p' = 2 - 1 \times 1 = \boxed{1}$

D'où : l'équation réduite de la droite (Δ) est : $y = x + 1$

b) Vérifier que la droite (Δ) passe par le point $J(0; 1)$ **(0.25pt)**

On a : $x_J + 1 = 0 + 1 = 1 = y_J$, donc : $y_J = x_J + 1$,

D'où : la droite (Δ) passe par le point $J(0; 1)$

4 Montrer que le triangle ABJ est rectangle et isocèle en J **(0.75pt)**

Puisque $J \in (\Delta)$, or (Δ) est la médiatrice de $[AB]$, alors : $\boxed{JA = JB}$ (1)

Puisque $y_A = y_J$, alors : $(AJ) \parallel (OI)$, et puisque $x_B = x_J$, alors : $(BJ) \parallel (OJ)$,

Puisque $(OI) \perp (OJ)$ (car le repère (O, I, J) est orthonormé), alors : $\boxed{(AJ) \perp (BJ)}$ (2)

D'après (1) et (2), le triangle ABJ est rectangle et isocèle en J