Exercice 1 (3.5 points)

Soit α un nombre complexe non nul.

I- On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z :

$$E_\alpha \quad : \quad z^2 - i\alpha\sqrt{3}z - \alpha^2 = 0$$

1 a) Vérifier que le discriminant de E_α est $\Delta = \alpha^2$. $(0,25pt)$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation E_α. $(0,5pt)$

2 Sachant que $\alpha = |\alpha|\, e^{i\lambda}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$, mettre les deux racines de l'équation E_α sous la forme exponentielle. $(0,5pt)$

II- On suppose que le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$.

On considère les points Ω, M_1 et M_2 d'affixes respectivement α, $z_1 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\alpha$ et $z_2 = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\alpha$ et soit R la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

1 a) Montrer que $R(\Omega) = M_1$ et que $R\left(M_1\right) = M_2$. $(0,5pt)$

b) En déduire que les deux triangles $O\Omega M_1$ et OM_1M_2 sont équilatéraux. $(0,25pt)$

2 a) Vérifier que : $z_1 - z_2 = \alpha$. $(0,25pt)$

b) Montrer que Les deux droites (ΩM_2) et (OM_1) sont orthogonales. $(0,5pt)$

c) En déduire que $O\Omega M_1M_2$ est un losange. $(0,25pt)$

3 Montrer que pour tout réel θ, le nombre : $Z = \dfrac{z_2-\alpha}{z_1-\alpha} \div \dfrac{z_2 - |\alpha|\, e^{i\theta}}{z_1 - |\alpha|\, e^{i\theta}}$ est un réel. $(0,5pt)$

Exercice 2 (3 points)

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n $(n \in \mathbb{N}^*,\ n \geq 3)$. On retire, sans remise, l'une après l'autre toutes les boules de cette urne. Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

1 Quelle est la probabilité pour que les boules 1, 2 et 3 sortent consécutivement et dans cet ordre ? $(1pt)$

2 Calculer la probabilité que les boules 1, 2 et 3 sortent dans cet ordre (consécutivement ou pas) ? $(1pt)$

3 On considère la variable aléatoire X_n égale au nombre de tirages nécessaire pour obtenir les boules 1, 2 et 3.

Déterminer la loi de probabilité de X_n. $(1pt)$

Exercice 3 (3.5 points)

On considère l'espace vectoriel de dimension 2 noté $(V_2,+,.)$.

Soit $(\vec{i},\vec{j})$ une base de V_2. On pose : $\overrightarrow{e_1} = \dfrac{1}{2}\vec{i} + \dfrac{1}{2}\vec{j}$ et $\overrightarrow{e_2} = \dfrac{1}{2}\vec{i} - \dfrac{1}{2}\vec{j}$

Soit $*$ la loi de composition interne définie sur V_2 par :

$$\forall (x,y,x',y') \in \mathbb{R}^4 \quad \left(x\vec{i}+y\vec{j}\right) * \left(x'\vec{i}+y'\vec{j}\right) = (xx'+yy')\,\vec{i} + (xy'+yx')\,\vec{j}$$

1 a) Montrer que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est une base de V_2. $(0.25pt)$

b) Vérifier que : $\vec{e_1} * \vec{e_1} = \vec{e_1}$; $\vec{e_2} * \vec{e_2} = \vec{e_2}$ et $\vec{e_1} * \vec{e_2} = \vec{e_2} * \vec{e_1} = \vec{0}$. $(0.25pt)$

c) Montrer que :

$$\forall (X,X';Y,Y') \in \mathbb{R}^4 \ (X\vec{e_1}+Y\vec{e_2}) * (X'\vec{e_1}+Y'\vec{e_2}) = XX'\vec{e_1} + YY'\vec{e_2}.$$ $(0.25pt)$

2 a) Montrer que la loi $*$ est commutative. $(0.25pt)$

b) Montrer que la loi $*$ est associative. $(0.25pt)$

c) Montrer que la loi $*$ admet un élément neutre. $(0.25pt)$

d) Montrer que $(V_2, +, *)$ est un anneau commutatif unitaire. $(0.25pt)$

3 Soit $\vec{u} \in V_2 - \left\{\vec{0}\right\}$. On note : $E_{\vec{u}} = \{\lambda\vec{u} / \lambda \in \mathbb{R}\}$

a) Montrer que $(E_{\vec{u}}, +)$ est un sous-groupe du groupe $(V_2, +)$. $(0.25pt)$

b) Montrer que $(E_x, +, .)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace $(V_2, +, .)$. $(0.25pt)$

c) Montrer que : $E_{\vec{u}}$ stable pour $* \Leftrightarrow$ la famille $(\vec{u} * \vec{u}, \vec{u})$ est liée. $(0.5pt)$

4 On suppose que : $(\exists \alpha \in \mathbb{R}^*) \quad : \quad \vec{u} * \vec{u} = \alpha\vec{u}$

On considère l'application $\varphi : \mathbb{R}^* \to E_{\vec{u}}$

$$x \mapsto \frac{x}{\alpha}\vec{u}$$

a) Montrer que φ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}^*, \times)$ vers $(E_{\vec{u}}, *)$. $(0.5pt)$

b) En déduire que $(E_{\vec{u}}, +, *)$ est un corps commutatif. $(0.25pt)$

Exercice 4 (10 points)

PARTIE I :

On considère la fonction g définie sur $]-1; +\infty[$ par : $g(x) = 1 + x^2 - 2x(1+x)\ln(1+x)$

1 a) Montrer que : $\lim\limits_{x \to -1^+} g(x) = 2$ $(0.25pt)$

b) Montrer que : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ $(0.5pt)$

2 Montrer que g est dérivable sur I et que $(\forall x \in I) \quad g'(x) = -2(1+2x)\ln(1+x)$ $(0.5pt)$

3 On donne le tableau de variations de g :

x	-1		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	2	$\searrow$	$\frac{5}{4} - \frac{\ln 2}{2}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

a) Montrer qu'il existe un réel strictement positif α unique tel que : $g(\alpha) = 0$. $(0.5pt)$

b) Vérifier que : $\alpha < 1$ (On prendra : $\ln 2 \approx 0.7$) $(0.25pt)$

c) En déduire que : $(\forall x \in]-1; \alpha[) \quad 0 < g(x)$ et que : $(\forall x \in]\alpha; +\infty[) \quad g(x) < 0$ $(0.5pt)$

Partie II :

On considère la fonction f définie sur $I =]-1; +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{1+x^2}$

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 (a) Calculer $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu. $(0.5pt)$

(b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu. $(0.5pt)$

2 (a) Montrer que f est dérivable sur I et que $(\forall x \in I) \quad f'(x) = \dfrac{g(x)}{(1+x)\,(1+x^2)^2}$ $(0.75pt)$

(b) Donner le sens de variation de f sur I $(0.5pt)$

(c) Vérifier que : $f(\alpha) = \dfrac{1}{2\alpha(1+\alpha)}$ et que : $\quad (\forall x \in I) \quad f(x) \leq \dfrac{1}{2\alpha(1+\alpha)}$ $(0.75pt)$

3 (a) Donner l'équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0. $(0.25pt)$

(b) Montrer que : $(\forall x > 0) \quad \ln(1+x) < x$ $(0.5pt)$

(c) En déduire que : $(\forall x > 0) \quad f(x) < x$ $(0.25pt)$

(d) Représenter graphiquement (T) et (C) (On prendra : $\alpha = 0.8$ et $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$). $(1pt)$

Partie III : On pose $J = \displaystyle\int_0^1 f(x)dx$

1 (a) En utilisant le changement de variable : $t = \dfrac{1-x}{1+x}$, montrer que : $J = \dfrac{\pi}{8}\ln 2$ $(1pt)$

(b) Déterminer, en cm^2, l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), la tangente. (T), la droite d'équation $x = 0$ et la droite d'équation $x = 1$ $(0.5pt)$

2 En utilisant la méthode d'intégration par parties, calculer : $K = \displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan(x)}{1+x}dx$ $(1pt)$

FIN