## Exercice 1 (3.5 points)

On rappelle que $(\mathbb{C},+,\times)$ est un corps commutatif et que $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire de zéro la matrice nulle $O=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ et d'unité la matrice $I=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$

Soit $*$ la loi de composition interne définie sur $\mathbb{C}$ par :

$$(\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2)\,(\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2) : (x+yi)*(a+bi)=xa+(x^2b+a^2y)\,i$$

**1**
- **a** Montrer que la loi $*$ est commutative sur $\mathbb{C}$. $(0,25pt)$
- **b** Montrer que la loi $*$ est associative sur $\mathbb{C}$. $(0,5pt)$
- **c** Montrer que la loi $*$ admet élément neutre $e$ que l'on déterminera. $(0,25pt)$
- **d** Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$. Montrer que le nombre complexe $x+yi$ admet le nombre complexe $\dfrac{1}{x}-\dfrac{y}{x^4}i$ comme symétrique pour la loi $*$. $(0,25pt)$

**2** On considère le sous-ensemble $E$ de $\mathbb{C}$ définie par : $E=\{x+yi/x\in\mathbb{R}_+^*;y\in\mathbb{R}\}$
- **a** Montrer que $E$ est stable pour la loi $*$ dans $\mathbb{C}$. $(0,25pt)$
- **b** Montrer que $(E,*)$ est est un groupe commutatif. $(0,5pt)$

**3** On considère le sous-ensemble $G$ de $E$ définie par : $G=\{1+yi/y\in\mathbb{R}\}$. Montrer que $G$ est un sous-groupe de $(E,*)$. $(0,5pt)$

**4** On considère l'ensemble $F=\left\{M(x,y)=\begin{pmatrix}x&y\\0&x\end{pmatrix}/x\in\mathbb{R}_+^*;y\in\mathbb{R}\right\}$
- **a** Montrer que $F$ est stable pour la loi $\times$ dans $M_2(\mathbb{R})$. $(0,25pt)$
- **b** Soit $\varphi$ l'application de $E$ vers $F$ qui à tout nombre complexe $x+yi$ de $E$ fait correspondre la matrice $M(x^2,y)=\begin{pmatrix}x^2&y\\0&x^2\end{pmatrix}$ de $F$. Montrer $\varphi$ est un isomorphisme de $(E,*)$ vers $(F,\times)$. $(0,5pt)$
- **c** En déduire que $(F,\times)$ est un groupe commutatif. $(0,25pt)$

## Exercice 2 (3.5 points)

Soit $m$ un nombre complexe non réel $(m\in\mathbb{C}-\mathbb{R})$.

**I-** On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation d'inconnue $z$ définie par :

$$(E) : z^2-(1+i)(1+m)z+2im=0$$

**1**
- **a** Montrer que le discriminant de l'équation $(E)$ est non nul.
- **b** Déterminer $z_1$ et $z_2$, les solution de l'équation $(E)$.

**2** On suppose dans cette question que $m=e^{i\theta}$ avec $0<\theta<\pi$.
- **a** Déterminer le module et un argument de $z_1+z_2$.
- **b** Montrer que si $z_1z_2\in\mathbb{R}$ alors $z_1+z_2=2i$.

**II-** Le plan complexe est rapporté a un repère orthonormé direct $(0;\overline{u},\overline{v})$.
On considère les points suivants : $A$ le point d'affixe $a=1+i$, $B$ le point d'affixe $b=(1+i)m$, $C$ le point d'affixe $c=1-i$, $D$ l'image du point $B$ par la rotation de centre $O$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et $\Omega$ le milieu du segment $[CD]$.

**1**
- **a** Montrer que l'affixe du point $\Omega$ est $\omega=\dfrac{(1-i)(1-m)}{2}$.
- **b** Calculer $\dfrac{b-a}{\omega}$.
- **c** En déduire que $(O\Omega)\perp(AB)$ et que $AB=2O\Omega$.

**2** La droite $(O\Omega)$ coupe la droite $(AB)$ au point $H$ d'affixe $h$.
- **a** Montrer que $\dfrac{h-a}{b-a}$ est un réel et que $\dfrac{h}{b-a}$ est un imaginaire pur.
- **b** En déduire $h$ en fonction de $m$.

## Exercice 3 (3 points)

On admet que $2969$ (l'année amazighe actuelle) est un nombre premier.
Soit $n$ et $m$ deux entiers naturels vérifiant : $n^8+m^8\equiv 0[2969]$

**1** On suppose dans cette question que $2969$ ne divise pas $n$.
- **a** En utilisant le théorème de BEZOUT, montrer que : $(\exists u\in\mathbb{Z})\ ;\ u\times n\equiv 1[2969]$. $(0,5pt)$
- **b** En déduire que : $(u\times m)^8=-1[2969]$ et que : $(u\times m)^{2968}=-1[2969]$
(On remarque que : $2968=8\times 371$). $(0,5pt)$
- **c** Montrer que $2969$ ne divise pas $u\times m$. $(0,5pt)$
- **d** En déduire qu'on a aussi $(u\times m)^{2868}\equiv 1[2969]$. $(0,5pt)$

**2**
- **a** En utilisant les résultats précédents, montrer que $2969$ divise $n$. $(0,5pt)$
- **b** Montrer que : $n^8+m^8\equiv 0[2969] \quad\Leftrightarrow\quad n\equiv 0[2969] \quad$ et $\quad m\equiv 0[2969]$ $(0,5pt)$

## Exercice 4 (10 points)

**PARTIE I :** On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=4x\left(e^{-x}+\dfrac{1}{2}x-1\right)$
et on note $(C)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

**1** Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. $(0,5pt)$

**2**
- **a** Montrer que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que : $(\forall x\in\mathbb{R})$ : $f'(x)=4\left(e^{-x}-1\right)(1-x)$. $(0,5pt)$
- **b** Étudier les variations de $f$ sur $R$, puis donner son tableau de variations. $(0,75pt)$
- **c** Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha$ dans l'intervalle $\left]\dfrac{3}{2},2\right[$ tel que $f(\alpha)=0$.
(On prendra $e^{\frac{3}{2}}=4,5$) $(0,5pt)$
- **d** Vérifier que : $e^{-\alpha}=1-\dfrac{\alpha}{2}$. $(0,25pt)$

**3**
- **a** En appliquant le théorème de ROLLE d la fonction $f'$, montrer qu'il existe un réel $x_0$ de l'intervalle $]0,1[$ tel que : $f''(x_0)=0$ $(0,5pt)$

b) En appliquant le théorème des accroissements finis a la fonction $f''$, montrer que, pour tout réel $x$ différent de $x_0$ de l'intervalle $[0,1]$, on a : $\dfrac{f''(x)}{x-x_0} > 0$ $(0,5pt)$

c) En déduire que $I\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ est un point d'inflexion de la courbe $(C)$ $(0,25pt)$

**4** a) Étudier les branches infinies de la courbe $(C)$. $(0,5pt)$

b) Représenter graphiquement la courbe (C) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ $(0,5pt)$
(On prendra : $\|i\| = \|\vec{j}\| = 1\text{cm}$, $f(1) = -0.5$ et il n'est pas demandé de représenter le point $I$)

**5** a) Vérifier que : $(\forall x \in ]-\infty,\alpha]) \quad ; \quad f(x) \leq 0$ $(0,25pt)$

b) Montrer que : $\displaystyle\int_0^{\alpha} f(x)dx = \frac{2}{3}\alpha\left(\alpha^2-3\right)$, en déduire que : $\dfrac{3}{2} < \alpha \leq \sqrt{3}$ $(0,75pt)$

c) Calculer en fonction de $\alpha$, en $\text{cm}^2$, l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) et les droites d'équations respectives : $y=0, x=0$ et $x=\alpha$. $(0,5pt)$

**PARTIE II :** On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 < \alpha \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}) \quad ; \quad u_{n+1} = f\left(u_n\right) + u_n$$

**1** a) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n < \alpha$ $(0,5pt)$

(utiliser la question 5 -a) de la PARTIE I)

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante $(0,25pt)$

**2** On suppose que $0 \leq u_0$ et on pose $(\forall x \in \mathbb{R}) ; g(x) = e^{-x} + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{4}$

a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad ; \quad g(x) > 0$ (On prendra : $\ln 2 = 0.69$) $(0,5pt)$

b) En utilisant le résultat de la question précédente, montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; 0 \leq u_n$ $(0,5pt)$

(On remarque que : $f(x) + x = 4xg(x)$)

c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. $(0,25pt)$

d) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ $(0,5pt)$

**3** On suppose que $u_0 < 0$

a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad ; \quad u_{n+1} - u_n \leq f\left(u_0\right)$ $(0,5pt)$

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad ; \quad u_n \leq u_0 + nf\left(u_0\right)$ $(0,5pt)$

c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ $(0,25pt)$