NOMBRES ENTIERS ET RATIONNELS

I. NOMBRES ENTIERS ET RATIONNELS

Les **nombres entiers** sont les nombres qui peuvent s'écrire sans virgule.

Exemples : 5 ; $\sqrt{4}$; $\frac{12}{3}$ sont des nombres entiers. (en effet : $\sqrt{4} = 2$ et $\frac{12}{3} = 4$)

Les **nombres décimaux** sont les nombres qui peuvent s'écrire avec un nombre fini de chiffres derrière la virgule.

Exemples : 6,7 ; $\frac{354}{1\,000}$; $\frac{3}{2}$ sont des nombres décimaux. (en effet : $\frac{354}{1000} = 0,354$ et $\frac{3}{2} = 1,5$)

Remarque :

Tous les nombres entiers sont des nombres décimaux : $9 = 9,0$

Les **nombres rationnels** sont les nombres qui peuvent s'écrire comme un quotient de deux entiers.

Exemples : $\frac{1}{3}$ et $\frac{5}{7}$ sont des nombres rationnels.

Remarque :

Tous les nombres entiers et décimaux sont des nombres rationnels : $9 = \frac{9}{1} = \frac{45}{5}$; $3,25 = \frac{325}{100}$

ATTENTION : Certains nombres n'entrent dans aucune de ces catégories. On dit qu'ils sont **irrationnels**.

Exemples : $\sqrt{2}$ et π sont des nombres irrationnels.

II. DIVISEURS D'UN NOMBRE ENTIER.

a. Diviseurs d'un nombre entier :

Définition :

Soit a et b deux nombres entiers.

On dit que **b est un diviseur de a** quand la division de a par b donne un nombre entier.

Exemples : **Les diviseurs de 12** sont : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 12.

12 : 1 = 12 12 : 2 = 6 12 : 3 = 4 12 : 4 = 3

12 : 6 = 2 12 : 12 = 1 12 : 12 = 1

Par contre, 5 et 7 ne sont pas des diviseurs de 12 :

12 : 5 = 2,4 12 : 7 ≈ 1,714285714…

b. Nombres premiers :

Définition :

On dit qu'un nombre est **premier s'il ne possède que deux diviseurs : 1 et lui-même.**

Exemple : Les diviseurs de 31 sont : 1 et 31.

III. DIVISEURS COMMUNS A DEUX NOMBRES ENTIERS.

a. Diviseurs communs à deux nombres entiers :

Définition :

On dit qu'un nombre est **un diviseur commun** de deux nombres a et b s'il divise à la fois a et b.

Exemple : Les diviseurs de 12 sont : **1**, **2**, **3**, 4, **6** et 12

Les diviseurs de 18 sont : **1**, **2**, **3**, **6**, 9 et 18

Ainsi les **diviseurs communs** à 12 et 18 sont : 1, 2, 3 et 6

b. PGCD :

Définition :

On appelle PGCD le **Plus Grand Diviseur Commun** (ou « Commun Diviseur ») à deux nombres entiers.

Exemple : Ci-dessus, nous avons vu que les diviseurs communs à 12 et 18 sont : 1, 2, 3 et 6

Le PGCD de 12 et 18 est 6

On écrit : **PGCD (12 ; 18) = 6**.

c. Nombres premiers entre eux :

Définition

On dit que deux nombres sont **premiers entre eux** quand ils ont pour unique diviseur commun 1.

Cela revient à dire que leur **PGCD est 1**.

Exemple : Les nombres 15 et 22 sont-ils premiers entre eux ?

15 a pour diviseurs : 1, 3, 5 et 15.

22 a pour diviseurs : 1, 2, 11 et 22.

L'unique diviseur commun de 15 et 22 est 1 : **PGCD (15 ; 22) = 1** → Ils sont premiers entre eux.

Exemple : Les nombres 15 et 48 sont-ils premiers entre eux ?

15 a pour diviseurs : 1, 3, 5 et 15 → il n'est pas premier.

48 a pour diviseurs : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48 23 → il n'est pas premier.

Le PGCD de 15 et 48 est égal à 3 : **PGCD (15 ; 48) = 3** → Ils ne sont pas premiers entre eux.

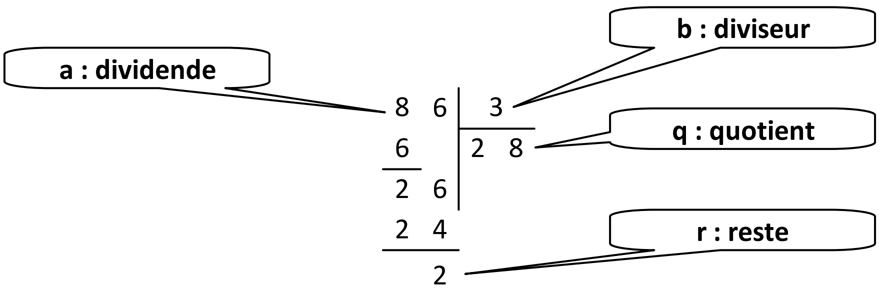
Remarque : 1 n'admet qu'un seul diviseur : lui-même. Il n'est pas considéré comme un nombre premier.

Quelques nombres premiers : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 ; 47 ; 53 ; 59 ; 61…

IV. ALGORITHME D'EUCLIDE – CALCUL DE PGCD.

a. Division euclidienne :

On appelle **DIVISION EUCLIDIENNE** la division dans laquelle le **dividende**, le **diviseur** et le **quotient** et le **reste** sont des nombres entiers.



Dividende = diviseur × quotient + reste

$86 = 3 \times 28 + 2$

Cette division se résume à l'égalité suivante : $86 - 3 \times 28 = 2$

« Dans 86, il y a 3 fois le nombre 28, et il reste 2 »

En règle générale : $\mathbf{a = bq + r}$ donc $\mathbf{a - bq = r}$

« Dans **a**, il y a **q** fois le nombre **b**, et il reste **r** »

***Exemple* (à la machine) : division euclidienne de 785 par 13 :**

On calcule le **quotient** : $785 : 13 \approx 60{,}3846…$ Donc le quotient $\mathbf{q = 60}$.

On calcule le **reste** : $785 - 13 \times 60 = 5$. Donc le reste $\mathbf{r = 5}$.

Ainsi : $\mathbf{785 = 13 \times 60 + 5}$.

METHODE

Pour des grands nombres, la recherche des diviseurs peut être longue et fastidieuse.

→ on fait une **succession de divisions euclidiennes** du diviseur par le reste jusqu'à obtenir un reste nul.

→ **le PGCD est le dernier reste non nul.**

Exemple **:** On cherche le PGCD des nombres 1209 et 899 : On divise le « grand » par le « petit » :

dividende	diviseur	reste	→	dividende	–	diviseur	×	quotient	=	reste
1 209	**899**	**310**	→	**1 209**	–	**899**	×	**1**	=	**310**
899	**310**	**279**	→	**899**	–	**310**	×	**2**	=	**279**
310	**279**	**31**	→	**310**	–	**279**	×	**1**	=	**31**
279	**31**	**0**	→	**279**	–	**31**	×	**9**	=	**0**
31	**0**	**0**	→	**0**	–	**0**	×	**0**	=	**0**

→ **le dernier reste non nul est 31, donc PGCD (1 209 ; 899) = 31**.

V. FRACTIONS IRREDUCTIBLES.

Le PGCD sert essentiellement à simplifier des écritures fractionnaires pour les rendre directement irréductibles.

Définition :

Une fraction est dite **irréductible** si son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux.

Exemples **:** 15 et 22 sont premiers entre eux, donc la fraction $\frac{22}{15}$ est une fraction irréductible.

12 et 18 ne sont pas premiers entre eux : **PGCD (12 ; 18) = 6**

→ la fraction $\frac{12}{18}$ est « réductible » : $\frac{12}{18} = \frac{6\times 2}{6\times 3} = \frac{2}{3}$.

Exemples **:**

On a calculé le PGCD des nombres 1 209 et 899 : PGCD (1 209 ; 899) = **31**.

PGCD (1 209 ; 899) $\neq$ 1 , donc ces nombres ne sont pas premiers entre eux.

La fraction $\frac{1209}{899}$ peut se simplifier :

$\frac{1209}{899} = \frac{31\times 39}{31\times 29} = \frac{39}{29}$ et la fraction $\frac{39}{29}$ est irréductible.