

استعدادا لاجتياز فروضك	الدوال اللوغاريتمية- الدوال الأسية حلول مقترحة	السنة 2 بكالوريا علوم رياضية
فرض تجريبي من اقتراح أذ سمير لخريسي - مدة الانجاز ساعتان		
تمرين 1 :		
$g(x) = e^x + e^{-x} - 2$ (I)		
	<p>لدينا g دالة قابلة للاشتقاق على IR ولدينا : $\forall x \in IR \quad g'(x) = e^x - e^{-x}$</p> <p>ولدينا : $x \in]-\infty; 0] \Rightarrow x \leq 0 \Rightarrow 2x \leq 0 \Rightarrow x \leq -x \Rightarrow e^x \leq e^{-x} \Rightarrow g'(x) \leq 0$</p> <p>إذن g تناقصية على $]-\infty; 0]$</p>	1
	<p>ليكن $x < 0$ ، نعتبر الدالة $h(t) = e^t - e^{-t} - 2t$ ذات المتغير t ، هذه الدالة متصلة على $[x, 0]$ و قابلة للاشتقاق على $]x, 0[$ (لأنها متصلة و قابلة للاشتقاق على IR) ، إذن حسب مبرهنة التزايد المتناهية فإنه : $\exists c_x \in]x, 0[\quad h(x) - h(0) = x h'(c_x)$ ، ولدينا : $\forall t \in IR \quad h'(t) = e^t + e^{-t} - 2 = g(t)$</p> <p>منه : $h(x) = x g(c_x)$ ($h(0) = 0$) ، بما أن g تناقصية على $]-\infty; 0]$ فإن :</p> <p>$x < c_x < 0 \Rightarrow g(0) < g(c_x) < g(x) \Rightarrow 0 < \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x} < e^x + e^{-x} - 2$</p> <p>منه : $x < 0 \Rightarrow \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x} \leq \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x^2} \leq 0$</p> <p>بالتالي : $\forall x < 0; \quad \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x} \leq \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x^2} \leq 0$</p>	2
	<p>يجب جعل x عددا ثابتا أثناء البرهان وذلك بالجملة : « ليكن $x < 0$ »</p> <p>في السطر الأخير وبعد أن نكون قد برهنا على صحة التفاوت بالنسبة لقيمة ثابتة x ، يحق لنا استنتاج جملة رياضية تتضمن المكمل الكوني تعميم النتيجة لكل الأعداد السالبة.</p>	
	<p>بما أن : $\lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ ، فإن :</p> <p>$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 + (e^{-x} - 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1}{-x} = 1 - 1 = 0$</p> <p>فإن : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x^2} = 0$</p>	3
	<p>لدينا الدالة $p(x)$ قابلة للاشتقاق على IR ولدينا :</p> <p>$\forall x \in IR \quad p'(x) = (e^x + e^{-x}) + x(e^x - e^{-x}) - e^x - e^{-x} = x(e^x - e^{-x})$</p> <p>وبما أن : $x \in]-\infty; 0] \Rightarrow e^x \leq e^{-x} \Rightarrow x(e^x - e^{-x}) \geq 0 \Rightarrow p'(x) \geq 0$</p> <p>فإن $p(x)$ تزايدية على $]-\infty; 0]$ ، منه : $x \in]-\infty; 0] \Rightarrow p(x) \leq p(0) \Rightarrow p(x) \leq 0$</p> <p>إذن : $\forall x \in]-\infty; 0] \quad p(x) \leq 0$</p>	4
	<p>$f(0) = 0$ ، $\forall x > 0 \quad f(x) = x^2 \left(\ln(x) - \frac{1}{2} \right)$ ، $\forall x < 0 \quad f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{x} - 2$</p>	(II)
	<p>لدينا : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x} - 2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - (e^{-x} - 1)}{x} - 2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1}{-x} - 2 = 1 + 1 - 2 = 0$</p> <p>و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \left(\ln(x) - \frac{1}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln(x) - \frac{1}{2} x^2 = 0 - 0 = 0$</p> <p>إذن : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$ ، بالتالي f متصلة في الصفر</p>	1

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \left(\ln(x) - \frac{1}{2} \right) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln(x) - \frac{1}{2} x = 0 - 0 = 0 \quad \text{لدينا :}$$

$$\text{و } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{e^x - e^{-x} - 2}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x^2} = 0 \quad \text{(حسب سؤال I 3)}$$

إذن f قابلة للاشتقاق في الصفر حيث: $f'(0) = 0$ وهذا يعني أن منحنى الدالة f يقبل مماسا أفقيا في النقطة $O(0;0)$

$$\text{لدينا : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\ln(x) - \frac{1}{2} \right) = +\infty \quad \text{(لأن : } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) - \frac{1}{2} = +\infty \text{)}$$

$$\text{و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\ln(x) - \frac{1}{2} \right) = +\infty \quad \text{(لأن : } \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) - \frac{1}{2} = +\infty \text{)}$$

إذن (Cf) يقبل فرعاً شلجيمياً باتجاه محور الأرتايب جوار $+\infty$

$$\text{ولدينا : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} + \frac{e^{-x}}{x} - 2 = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{-t}}{-t} - \frac{e^t}{t} - 2 = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-1}{te^t} - \frac{e^t}{t} - 2 = -\infty$$

$$\text{و } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x^2} + \frac{e^{-x}}{x^2} - \frac{2}{x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} + \frac{e^t}{t^2} + \frac{2}{t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t^2 e^t} + \frac{e^t}{t^2} + \frac{2}{t} = +\infty \quad \text{(وضعنا : } t = -x \text{)}$$

إذن (Cf) يقبل فرعاً شلجيمياً باتجاه محور الأرتايب جوار $-\infty$

$$\text{لدينا : } \forall x < 0 \quad f'(x) = \frac{(e^x + e^{-x})x - (e^x - e^{-x})}{x^2} = \frac{p(x)}{x^2}$$

$$\text{و } \forall x > 0 \quad f'(x) = 2x \left(\ln(x) - \frac{1}{2} \right) + x^2 \times \frac{1}{x} = 2x \ln(x) - x + x = 2x \ln(x)$$

لدينا حسب السؤال I 4) $p(x) \leq 0 \quad \forall x \in]-\infty; 0]$ منه: $\forall x < 0 \quad f'(x) \leq 0$ ولدينا على $]0; +\infty[$ لها نفس إشارة $\ln(x)$ أي لها نفس إشارة الحدانية $x-1$ بالتالي:

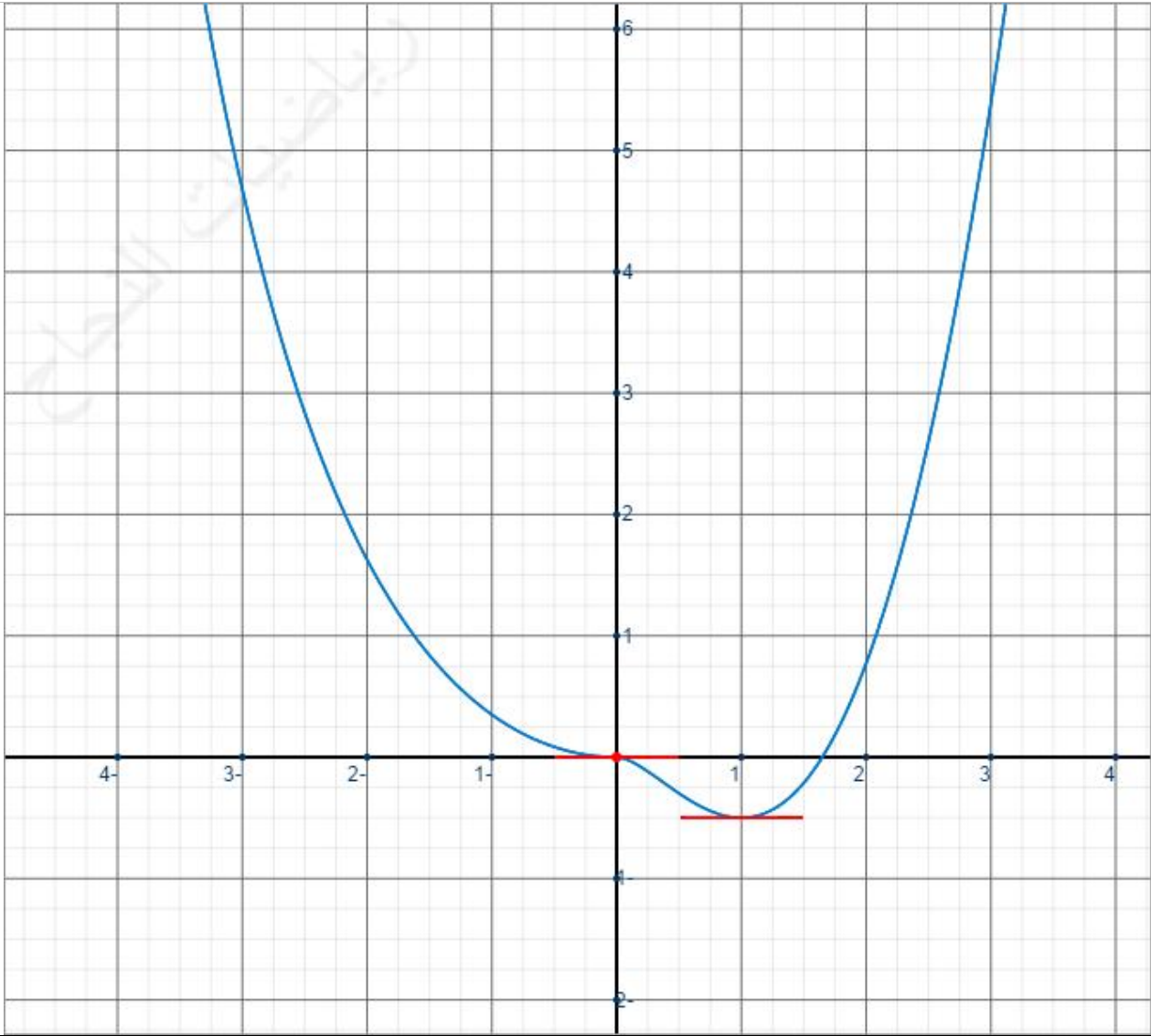
x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	-	+
$f(x)$	$+\infty$	0	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$

لدينا $f(0) = 0$ إذن (Cf) يمر من O

ولدينا على $] -\infty; 0[$ أي $f(x) < f(0)$ أي $f(x) < 0$

$$\text{وعلى }]0; +\infty[\text{ ، لدينا : } x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e} \quad \Leftrightarrow \ln(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow f(x) = 0$$

إذن (Cf) يقطع محور الأفصايل. في النقطتين $O(0,0)$ و $A(\sqrt{e}, 0)$



تمرين 2 : $f_n(x) = \frac{e^x}{x} - n; n \geq 3$

1 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f_n(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = -n$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$, $Df_n = \mathbb{R}^*$

2 لدينا f_n قابلة للاشتقاق على مجموعة تعريفها ولدينا : $\forall x \in \mathbb{R}^* f'_n(x) = \frac{e^x x - e^x}{x^2} = \frac{e^x}{x^2}(x-1)$ منه :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'_n(x)$		-	-	+
$f_n(x)$	$-n$	$-\infty$	$e-n$	$+\infty$

3 على $]-\infty; 0[$ لدينا : $f_n(x) < -n < 0$ ، و على $]0; +\infty[$ لدينا :

$f_n(]0; 1]) = \left[f_n(1); \lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) \right[= [e-n; +\infty[$: إذن $]0; 1]$ متصلة و تناقصية قطعاً على $]0; 1]$ وبما أن $0 \in [e-n; +\infty[$ (لأن : $e-n \leq e-3 < 0$) و الدالة $f_n(x)$ تباين على $]0; 1]$ (لأنها تقابل) فإن : $\exists ! u_n \in]0; 1] f_n(u_n) = 0$

$f_n([1; +\infty]) = [f_n(1); \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)] = [e-n; +\infty[$ إذن $[1; +\infty[$ متزايدة قطعاً على $[1; +\infty[$ وبما أن $0 \in [e-n; +\infty[$ والدالة $f_n(x)$ تباين على $[1; +\infty[$ فإن: $\exists! v_n \in [1; +\infty[f_n(v_n) = 0$
 خلاصة: المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل حلين وحيدين u_n و v_n حيث: $0 < u_n < 1 < v_n$

لدينا: $\forall x \in \mathbb{R}^* f_{n+1}(x) = \frac{e^x}{x} - (n+1) = f_n(x) - 1$
 منه: $f_{n+1}(v_n) = f_n(v_n) - 1 = 0 - 1 = -1$ و $f_{n+1}(u_n) = f_n(u_n) - 1 = 0 - 1 = -1$

لدينا: $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$ و $f_{n+1}(u_n) = -1$ منه: $f_{n+1}(u_{n+1}) > f_{n+1}(u_n)$
 وبما أن: $u_n \in]0; 1[$ فإن تناقصية f_{n+1} على $]0; 1[$ فإن $u_{n+1} < u_n$
 لدينا: $f_{n+1}(v_{n+1}) = 0$ و $f_{n+1}(v_n) = -1$ منه: $f_{n+1}(v_{n+1}) > f_{n+1}(v_n)$
 وبما أن: $v_n \in [1; +\infty[$ و f_{n+1} متزايدة على $[1; +\infty[$ فإن $v_{n+1} > v_n$
 بالتالي $(u_n)_{n \geq 3}$ تناقصية و $(v_n)_{n \geq 3}$ متزايدة

نعلم أنه إذا كانت g دالة متزايدة فإن: $a \geq b \Rightarrow g(a) \geq g(b)$ ، الاستلزام العكسي صحيح لأنه في الحقيقة الاستلزام $a \geq b \Rightarrow g(a) \geq g(b)$ يكافئ $a < b \Rightarrow g(a) < g(b)$ وهو شرط تحققه الدالة المتزايدة قطعاً وهذا هو المبدأ المستعمل في تحديد رتبة المتتاليتين أعلاه

بما أن $(u_n)_{n \geq 3}$ تناقصية و مصغرة بـ 0 فهي متقاربة، نضع: $a = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

لدينا: $f_n(u_n) = 0$ منه: $\frac{e^{u_n}}{u_n} = n$ منه: $u_n = \frac{e^{u_n}}{n}$

بما أن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{u_n} = e^a$ منه: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{u_n}}{n} = 0$ بالتالي: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

يمكن أيضاً استعمال التآطير: $0 < u_n < 1 \Rightarrow 1 < e^{u_n} < e \Rightarrow \frac{1}{n} < \frac{e^{u_n}}{n} < \frac{e}{n} \Rightarrow \frac{1}{n} < u_n < \frac{e}{n}$

بما أن $(v_n)_{n \geq 3}$ متزايدة فلكي نبين أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ يكفي أن نبين أنها غير مكبورة من أجل ذلك نفترض أنها مكبورة، ولكونها متزايدة سنستنتج أنها متقاربة وبنفس الطريقة السابقة

و بوضع $b = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ فنستنتج أن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{v_n}}{n} = 0$ منه: $b = 0$

لكننا نعلم أن: $\forall n \geq 3 v_n > 1$ منه: $b \geq 1$ وهذا غير ممكن

إذن $(v_n)_{n \geq 3}$ غير مكبورة بالتالي: $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$

يمكن استعمال التآطير هذه الحالة أيضاً، لكن ليس بالطريقة السابقة، بل كما يلي:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty \text{ فإن } \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n) = +\infty \text{ و حيث أن } \begin{cases} v_n = \frac{e^{v_n}}{n} \\ v_n > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_n = \ln(n v_n) \\ v_n > \ln(n) \end{cases}$$

لذلك من المفيد التدرب على إنجاز مثل هذه الأسئلة بطريقتين، لأنه أحياناً لا يتعدر علينا تطبيق إحداهما