الأولى علوم رياضية	فرض 2	2015-14

التمرين الأول

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $f(x) = x + 2 - \sqrt{x^2 - 2x + 4}$

1) أ- حدد D مجموعة تعريف الدالة f

ب- أحسب النهاية $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و أعط تاويلا هندسيا للنتيجة

2) أ- أحسب النهاية $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

ب- أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f) عند $-\infty$

3) أ- بين أن $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f'(x) = 1 - \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 4}}$

ب- بين أن الدالة f تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$ و أنجز جدول تغيرات الدالة f

4) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم $y = x \quad (\Delta)$

5) أسم المنحنى (C_f)

6) نعتبر المتتالية العددية $(U_n)_n$ المعرفة بما يلي : $U_0 = 1$ و $U_{n+1} = f(U_n)$

أ- بين أن $0 < U_n < 2 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

ب- أدرس رتابة المتتالية $(U_n)_n$ و استنتج أن $1 \le U_n < 2 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

7) أ- بين أن $\left|U_{n+1} - 2\right| \le \dfrac{4}{5}\left|U_n - 2\right| \quad (\forall n \in \mathbb{N})$ (نأخذ $\sqrt{3} > 1,5$)

ب- بين بالترجع أن $\left|U_n - 2\right| \le \left(\dfrac{4}{5}\right)^n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

ج- نضع $S_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1} U_k$ لكل عدد طبيعي غير منعدم n .

بين أن $2 - \dfrac{5}{n} + \dfrac{4^n}{n \times 5^{n-1}} \le S_n \le 2 \quad (\forall n \ge 1)$

التمرين الثاني

لتكن $(T_n)_{n\ge0}$ متتالية معرفة بما يلي : $T_n = \sum_{k=0}^{k=n} \dfrac{(-1)^k}{2k+1}$

نضع $U_n = T_{2n}$ و $V_n = T_{2n+1}$

1) أ- أحسب U_0 و V_0

ب- بين أن $V_n < U_n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

2) بين أن المتتالية $(V_n)_n$ تزايدية و أدرس رتابة المتتالية $(U_n)_n$

3) استنتج ان المتتالية $(T_n)_{n>0}$ محدودة

التمرين الثالث

لتكن h دالة معرفة من $]0,+\infty[$ نحو $\mathbb{R}$ و التي تحقق :

$(\forall x \in \mathbb{R}^{+*})(\forall y \in \mathbb{R}^{+*}) \quad h(xy) = h(x) + h(y)$

1) حدد $h(1)$

2) نفترض أن h قابلة للاشتقاق في النقطة 1 و أن $h'(1) = 1$.

بين أن h قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ وحدد دالتها المشتقة $h'(x)$

التمرين الرابع

لتكن a ، b و c أعداد حقيقية موجبة بين أن $a^3 + b^3 + c^3 \ge 3abc$