

# صحیح الغرض الاول

الاسد سن III

السنة الدراسية 2011 . 2010

الجزء II

$\forall x \in ]-1, +\infty[$

$$\frac{x}{3(x+2)} \leq \int_0^x \frac{t^2}{1+t} dt \leq \frac{x}{3}$$

اذا كان  $x > 0$

لدينا  $0 < t < x$

$$1 < t+1 < x+1$$

$$\frac{1}{x+1} < \frac{1}{t+1} < 1$$

يعني  $\frac{t^2}{x+2} < \frac{t^2}{t+1} < t^2$

$$\forall x > 0 \int_0^x \frac{t^2}{x+2} dt < \int_0^x \frac{t^2}{t+1} dt < \int_0^x t^2 dt$$

$$\frac{1}{x+2} \left[ \frac{t^3}{3} \right]_0^x < \int_0^x \frac{t^2}{t+1} dt < \left[ \frac{t^3}{3} \right]_0^x$$

$$\frac{x^3}{3(x+2)} < \int_0^x \frac{t^2}{t+1} dt < \frac{x^3}{3}$$

$$\frac{x}{3(x+2)} < \int_0^x \frac{t^2}{t+1} dt < \frac{x}{3}$$

ما اذا كان  $x \in ]-1, 0[$

لدينا  $x < t < 0$

$$x+1 \leq t+1 \leq 1$$

$$1 < \frac{1}{t+1} \leq \frac{1}{x+2}$$

اذنا  $t^2 \leq \frac{t^2}{t+1} \leq \frac{t^2}{x+2}$

$\forall x \in ]-1, 0[ \quad x < 0$

$$\int_x^0 t^2 dt \leq \int_x^0 \frac{t^2}{t+1} dt \leq \int_x^0 \frac{t^2}{x+2} dt$$

$$\left[ \frac{t^3}{3} \right]_x^0 \leq \int_x^0 \frac{t^2}{t+1} dt \leq \frac{1}{x+2} \left[ \frac{t^3}{3} \right]_x^0$$

تمرين (المسألة)

جزء II

لتبين ان  $\frac{1}{x^2} \int_0^x \frac{t^2}{1+t} dt = \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} + \frac{1}{2}$

لدينا  $\frac{1}{x^2} \int_0^x \frac{t^2}{1+t} dt = \frac{1}{x^2} \int_0^x \frac{t^2 - 1 + 1}{1+t} dt$

$$= \frac{1}{x^2} \int_0^x t - 1 + \frac{1}{1+t} dt$$

$$= \frac{1}{x^2} \int_0^x t - 1 dt + \frac{1}{x^2} \int_0^x \frac{1}{t+1} dt$$

$$= \frac{1}{x^2} \left[ \frac{t^2}{2} - t \right]_0^x + \frac{1}{x^2} \left[ \ln(t+1) \right]_0^x$$

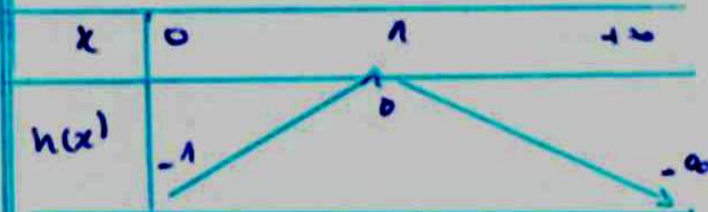
$$= \frac{1}{x^2} \left( \frac{x^2}{2} - x \right) + \frac{1}{x^2} \ln(x+1)$$

$$= \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} + \frac{1}{2}$$

من لتبين ان  $x - 1 - x \ln x \leq 0$

نضع الدالة  $h(x) = x - 1 - x \ln x$

$h'(x) = 1 - \ln x - 1 = -\ln x$



حسب جدول التغيرات

$\forall x > 0 \quad h(x) \leq h(1)$

$h(x) \leq 0$

$x - 1 - x \ln x \leq 0$

اذنا

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1) - x}{x^2} = -\frac{1}{2} \quad \text{لما}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{(x-1)^2} = -\frac{1}{2} \quad \text{وبالتالي}$$

وبالتالي في حالة الاستقار

$$f'(1) = -\frac{1}{2} \quad \text{في 1 بحيث}$$

## 2- المبرهن التفاضلي لـ $e^x$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \cdot \frac{x}{x-1}$$

$$= 0 \quad \text{لان}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

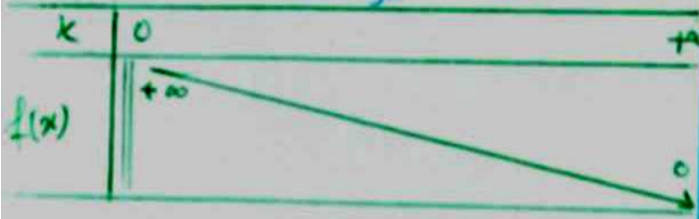
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x-1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x-1} \cdot \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x-1} = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty \quad \text{لان}$$

$$f'(x) = \left( \frac{\ln x}{x-1} \right)' = \frac{\frac{1}{x}(x-1) - \ln x}{(x-1)^2} = \frac{1 - \frac{1}{x} - \ln x}{(x-1)^2} = \frac{x - 1 - \ln x - 1}{x(x-1)^2} = \frac{h(x)}{x(x-1)^2} \leq 0$$

$\forall x > 0 \quad h(x) \leq 0$  لان جدول التغير



$$\left( -\frac{x}{3} \right) \cdot \frac{1}{x^2} \leq -\frac{1}{x^2} \int_0^x \frac{t^2}{1+t} dt \leq \frac{-x^3}{3(x+1)} \cdot \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{x}{3(x+1)} < \frac{1}{x^2} \int_0^x \frac{t^2}{1+t} dt < \frac{x}{3}$$

و عليه  $\forall x \in ]-1, +\infty[ \setminus \{0\}$

$$\frac{x}{x+1} < \frac{1}{x^2} \int_0^x \frac{t^2}{1+t} dt < \frac{x}{3} \quad \text{لدينا}$$

لكن الدالة  $f$  المعرفة على  $]0, +\infty[$  بتالي

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\ln x}{x-1} \\ f(1) = 1 \end{cases}$$

ب. لتبين ان  $f$  قابلة للاستقار في 1 و  $f'(1) = -\frac{1}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x-1} \quad \text{لدينا}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{(x-1)^2}$$

نضع  $x = x-1$  صح

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1) - x}{x^2}$$

و حسب ما سبق

$$\frac{\ln(x+1) - x}{x^2} = \frac{1}{x^2} \int_0^x \frac{t^2}{1+t} dt = \frac{1}{2}$$

لما

$$\frac{x}{3(x+1)} - \frac{1}{2} < \frac{\ln(x+1) - x}{x^2} < \frac{x}{3} - \frac{1}{2}$$

ولا حظ ان

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{3(x+1)} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$



$x \in ]0, 1[$

لدينا  $x^2 < t < x$

وبما أن  $f$  تناقصية  
 $f(x) < f(t) < f(x^2)$

$$\frac{\ln x}{x-1} < \frac{\ln t}{t-1} < \frac{2 \ln x}{x^2-1}$$

$\forall (x, x^2) \in ]0, 1[ \quad x^2 < x$

$$\frac{\ln x}{x-1} \int_x^{x^2} 1 dt < \int_x^{x^2} \frac{\ln t}{t-1} dt < \frac{2 \ln x}{x^2-1} \int_x^{x^2} 1 dt$$

$$\frac{\ln x}{x-1} (x-x^2) < -F(x) < \frac{2 \ln x}{x^2-1} (x-x^2)$$

$$\frac{2x \ln x}{x+1} < F(x) < x \ln x$$

$\forall x \in ]0, +\infty[$  وعليه

$$\frac{2x \ln x}{x+1} < F(x) < x \ln x$$

ب- اتصال وقابلية استيفان  $f$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \ln x}{x+1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0 \quad \text{لان}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = 0 = F(0) \quad \text{اذن}$$

$F$  متصلة في  $0$  ←

$\forall x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$  و

$$\frac{2 \ln x}{x+1} < \frac{F(x)}{x} < \ln x$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \ln x}{x+1} = -\infty$$

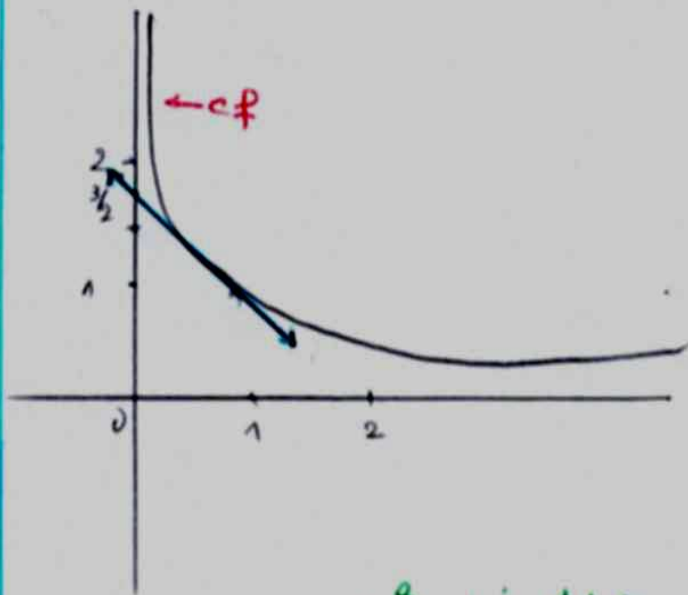
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x)}{x} = -\infty$$

$F$  غير متصلة للإستيفان  
 غير متصلة

4- إنشاء المصفوفة  $cf$

لما لم نحقق عند 1  $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$



← الحزب ب

$$I = ]0, +\infty[$$

$$F(x) = \int_x^{x^2} f(t) dt \quad x \neq 0, x \neq 1$$

$$F(0) = 0 \Rightarrow F(1) = 0$$

$$\frac{2x \ln x}{x+1} < F(x) < x \ln x \quad \text{لنسيب ان}$$

$$x < t < x^2 \quad x > 1$$

$f$  و  $f$  و  $f$  تناقصية ←

$$f(x^2) < f(t) < f(x)$$

$$\frac{2 \ln x}{x^2-1} < \frac{\ln t}{t-1} < \frac{\ln x}{x-1}$$

$\forall (x, x^2) \in ]0, +\infty[ \setminus \{1\} \quad x < x^2$

$$\frac{2 \ln x}{x^2-1} \int_x^{x^2} 1 dt < \int_x^{x^2} \frac{\ln t}{t-1} dt < \int_x^{x^2} 1 dt \times \frac{\ln x}{x-1}$$

$$\frac{2 \ln x}{x^2-1} (x^2-x) < F(x) < \frac{\ln x}{x-1} (x^2-x)$$

$$\frac{2x \ln x}{x+1} < F(x) < x \ln x$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x \ln x}{2+x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x+1} \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x+1} = 2 \quad \text{بحسب}$$

ب - لتبين ان

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x+1) \ln x < F(x) < 2 \ln(x+1) \ln x$$

$$x < t \leq x^2 \quad \text{لـ لـ}$$

$$\ln x \leq \ln t \leq 2 \ln x$$

$$\frac{\ln x}{t-1} \leq \frac{\ln t}{t-1} \leq \frac{2 \ln x}{t-1}$$

$$\forall (x, x^2) \in ]1, +\infty[ \quad x < x^2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_x^{x^2} \frac{1}{t+1} dt \leq \int_x^{x^2} \frac{\ln t}{t-1} dt \leq 2 \ln x \int_x^{x^2} \frac{1}{t-1} dt$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \ln(x+1) \right]_x^{x^2} < F(x) < 2 \ln x \left[ \ln(t-1) \right]_x^{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \ln \left( \frac{x^2-1}{x-1} \right) \right) < F(x) < 2 \ln x \left( \ln \left( \frac{x^2-1}{x-1} \right) \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x+1) < F(x) < 2 \ln x \ln(x+1)$$

ج - اخرج السنتيمي ر

$$\frac{\ln x \cdot \ln(x+1)}{x} < \frac{F(x)}{x} < \frac{2 \ln x \ln(x+1)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x \cdot \ln(x+1)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}}$$

لدينا اذا كان  $x > 1$

$$\frac{2x \ln x}{x+1} \leq F(x) \leq 2x \ln x$$

$$\frac{2x \ln x}{(x^2+1)} \leq \frac{F(x)}{x-1} \leq \frac{2x \ln x}{x-1}$$

$$\frac{2x \ln x}{x^2-1} \leq \frac{F(x)-F(1)}{x-1} \leq \frac{2x \ln x}{x-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x \ln x}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x}{x+1} \cdot \frac{\ln x}{x-1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x}{x+1} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x}{x-1} = 1 \quad \text{لـ لـ}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x \ln x}{x-1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{F(x)-F(1)}{x-1} = 1 \quad \text{اذن (1)}$$

اذا كان  $0 < x < 1$

$$\frac{2x \ln x}{x-1} < \frac{F(x)}{x-1} < \frac{2x \ln x}{x^2-1}$$

بالمثل

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x \ln x}{x-1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x \ln x}{x^2-1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{F(x)-F(1)}{x-1} = 1 \quad \text{اذن (2)}$$

من 1 و 2 لدينا F قابلة

للاستيفان على كمين 1 و 1 و 0

$$F'_d(2) = F'_g(1) = 1$$

$\Leftarrow$  F قابلة للاستيفان في 1



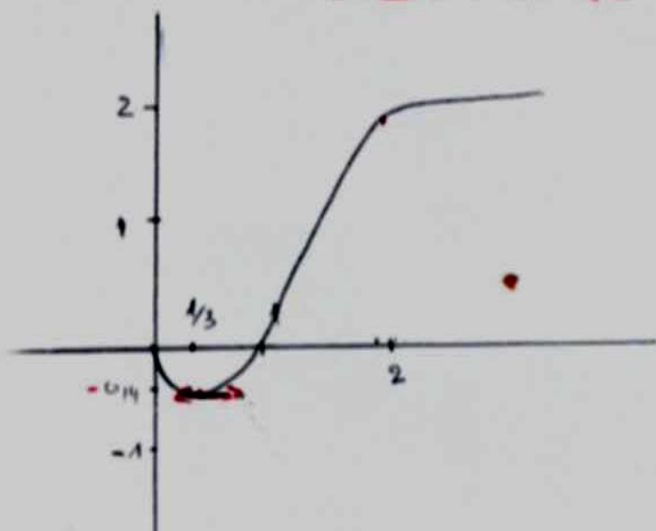
التي  $f$  قابلة للاستيفاء  
على  $]0, +\infty[$ .

$$\begin{aligned} F'(x) &= 2x f(x^2) - f(x) \\ &= \frac{2x \times 2 \ln(x)}{x^2 - 1} - \frac{\ln x}{x - 1} \\ &= \frac{4x \ln x - x \ln x - \ln x}{x^2 - 1} \\ &= \frac{\ln x (3x - 1)}{x^2 - 1} \end{aligned}$$

جدول تغيرات  $F$ .

$x$	0	$\frac{1}{3}$	1	$+\infty$
$\ln x$		-	-	+
$3x - 1$	-	0	+	+
$x - 1$	-	-	0	+
$F'(x)$	-	0	+	+
$F(x)$	0			$+\infty$

المختصا.



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}} \cdot \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\ln(\sqrt{x+1})}{\sqrt{x+1}} \cdot \left( \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x) - \ln(x+1)}{x} = 0$$

و هنا حصة ثانية

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x \ln(x+1)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \left( \frac{2 \ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{2 \ln(\sqrt{x+1})}{\sqrt{x+1}} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = 0$$

وعليه  $C_f$  يقبل فرعا  
شكليا نحو محور الـ  $y$  فاصلي.  
3. قابلية استيفاء  $F$ .

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{f}{t-1}$$

دالة  $G$  صليّة  $G$  بحيث

$$F(x) = G(x^2) - G(x).$$

$G(x)$  قابلة للاستيفاء  
على  $]0, +\infty[$ .

$x \rightarrow x^2$  قابلة للاستيفاء على  
 $\mathbb{R}_+^*$  و  $\mathbb{R}_+^*$

$G \circ u$  قابلة للاستيفاء  
على  $\mathbb{R}_+^*$

تمرين 2

$$iz = (1-2z)(z-i)$$

$$iz = z - i - 2z^2 + 2iz$$

$$0 = z + 2iz - 2z^2 - iz - i$$

وبالتالي

$$2z^2 - iz - z + i = 0$$

$$2z^2 - z(1+i) + i = 0$$

من صيغة كرفي

$$\Delta = 2i - 8i = -6i = 3(-2i) = (\sqrt{3}(1-i))^2$$

و عليه

$$z_1 = \frac{1+i - \sqrt{3} + \sqrt{3}i}{4}$$

$$= \frac{1-\sqrt{3}}{4} + i \left( \frac{1+\sqrt{3}}{4} \right)$$

$$z_2 = \frac{1+i + \sqrt{3} - \sqrt{3}i}{4}$$

$$= \frac{1+\sqrt{3}}{4} + i \left( \frac{1-\sqrt{3}}{4} \right)$$

$$S = \left\{ \left( \frac{1-\sqrt{3}}{4}, \frac{1+\sqrt{3}}{4} \right), \left( \frac{1+\sqrt{3}}{4}, \frac{1-\sqrt{3}}{4} \right) \right\}$$

$$f(z) - i = \frac{iz - iz - 1}{z - i} = \frac{-1}{z - i}$$

$$= -\frac{1}{r} e^{-i\alpha}$$

$$= \frac{e^{i(\pi - \alpha)}}{r}$$

$$M(z) \in S \Leftrightarrow |f(z) - i| = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{r} = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow |z - i| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

نضع  $A(x)$

$$\Leftrightarrow AM = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ك صيد الدائرة التي مركزها  $A$  و شعاعها  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$f(z) = \frac{iz}{z-i}$$

$f(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$  لدينا

$f(z) \in \mathbb{R}$  تقني

$$\frac{iz}{z-i} = \frac{i\bar{z}}{\bar{z}+i}$$

$$\Leftrightarrow iz(\bar{z}+i) = i\bar{z}(z-i)$$

$$\Leftrightarrow iz\bar{z} - z = i\bar{z}z + \bar{z}$$

$$\Leftrightarrow z + \bar{z} = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{Re}(z) = 0$$

$$\Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$$

ب - تحديد المجموعة

$$f(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{iz}{z-i} = \frac{-i\bar{z}}{\bar{z}+i}$$

تقني

$$\frac{iz}{z-i} = -\frac{i\bar{z}}{\bar{z}+i}$$

$$\Leftrightarrow iz(\bar{z}+i) = -i\bar{z}(z-i)$$

$$\Leftrightarrow iz\bar{z} - z = -i\bar{z}z - \bar{z}$$

$$\Leftrightarrow 2iz\bar{z} - (z - \bar{z}) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2i|z|^2 - 2i\text{Im}(z) = 0$$

$$z = x + iy$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - y = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

اذن  $E_1$  هي الدائرة التي مركزها  $O(0, \frac{1}{2})$  و شعاعها  $r = \frac{1}{2}$  محورها  $A(0, 1)$

ج - حل المعادلة

$$f(z) = 1 - 2z$$

$$f(z) = 1 - 2z$$

$$\frac{iz}{z-i} = 1 - 2z$$

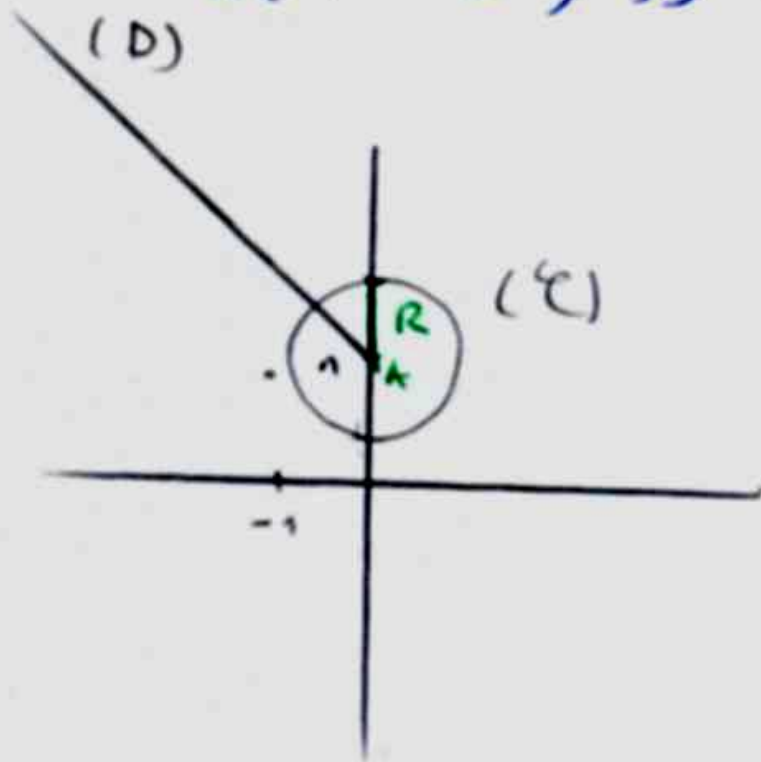
تقني

$$\Rightarrow \pi - \alpha = \frac{\pi}{4} [2\pi] \quad \text{٤ ٤}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{3\pi}{4} [2\pi].$$

$$\Rightarrow (\vec{u}, \vec{AM}) = \frac{3\pi}{4} [2\pi]$$

اذن (D) نصف المستقيم الذي  
معامله الموجب  $\cos(\frac{3\pi}{4}) = -1$  و  
والمصروف من  $\sin(\frac{3\pi}{4})$ .



لا تم انجازها تحت اشراف

الاستاذ: الماسني

من طرف التلميذ: مجرد

فاطمة السمرعراء.

2012 - 2013.